Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimez à l'aide des symboles Σ et $\prod$ les quantités suivantes.
   (a) $3+4+5+6+7+8+9+10$
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. $1+a^2+a^4+\cdots+a^{2n}$.
   (c) $2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n-2) \times 2n$
   (d) $1 \times 3 \times 5 \times ... \times (2n-1) \times (2n+1)$
2. Ecrire les sommes suivantes en extension.
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} 2k$.
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} 2^k$.
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$.
   (d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 1$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)$
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\mathbf{e}^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

Exercice 3.

1. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$
2. En déduire l'expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 4. Soit $(q,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes et les produits suivants.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k(1-q)$
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifiez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^4-k^4\right]$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 6. Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

1. A l'aide de formule de trigonométrie, exprimer $\cos(x)$ comme un quotient de sinus.
2. Calculez $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} 1$
2. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} j$
3. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} (i+j)^2$
4. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} (5i^2-18i^2j^2+5j^2)$

Exercice 8. Résoudre l'équation suivante :
$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=5n.$$

<u>Exercice 9.</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$

<u>Exercice 10.</u> Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $1 \leq k \leq n$. Démontrez que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. Calculez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
4. [*] Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

<u>Exercice 11.</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit $P = \displaystyle\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $I = \displaystyle\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.

1. Calculer $P + I$ et $P - I$.
2. En déduire I et P.

<u>Exercice 12.</u>

1. Quel est le coefficient devant a^4b^2 dans le développement de $(a-b)^6$?
2. Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans $(a-b+2c)^9$?

<u>Exercice 13.</u> [*] Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$.
On pose $A_n = (a-b)^{2n} + (a+b)^{2n}$.

1. Calculez A_n.
2. En déduire que le réel $s_n = (1-\sqrt{2})^{2n} + (1+\sqrt{2})^{2n}$ est un entier naturel pair.

<u>Exercice 14.</u> Pour tout entier naturel non nul p et pour tout entier naturel n, on pose : $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$.
L'objectif de ce problème est de calculer la somme $S_3(n)$ de trois manières différentes. Chacune des parties propose une méthode de calcul. Les parties sont indépendantes.

1. Rappeler sans démonstration, les expressions en fonction de l'entier naturel n, de $S_1(n)$ et $S_2(n)$.
2. **Démonstration par récurrence.**
   Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $S_3(n) = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. **En exprimant $S_3(n)$ en fonction de $S_2(n)$ et $S_1(n)$.**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant un changement d'indice, exprimer, $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4$ en fonction de $S_4(n)$ et de n.
   (b) Exprimer $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4$ en fonction de $S_4(n)$, $S_3(n)$, $S_2(n)$ et $S_1(n)$ (on pourra développer $(k+1)^4$).
   (c) En déduire une expression de $S_3(n)$ en fonction de n.
4. **À l'aide d'une somme double**
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que pour toute famille $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de réels : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{k-1} a_{k,j} + \sum_{i=1}^{k} a_{i,k}\right]$
   (*indication : on pourra commencer par une relation de Chasles*).
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$ de deux manières.
   En déduire $S_3(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.