BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 2

— 5 octobre 2024—

Exercice 1. – Calculs

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Donc, f' est positive sur $]0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$.
Donc, f est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$.
On en déduit que f est majorée par sa valeur en 1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) - 2\sqrt{x} < -2$ donc, en particulier, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) < 2\sqrt{x}}$.

2. $(E) : 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.
Posons $X = \sin(x)$. Alors $(E) \iff 2X^2 - 5X + 2 = 0$. C'est une équation du second degré en X. En calculant son discriminant, on trouve que cette équation a deux racines réelles qui sont 2 et $\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 &\iff \sin x = \tfrac{1}{2} \text{ ou } \sin x = 2\\
&\iff \sin x = \tfrac{1}{2} \text{ car } \sin x = 2 \text{ n'a pas de solution}\\
&\iff \sin x = \sin \tfrac{\pi}{6}\\
&\iff x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions de cette équation est } \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}}$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $0 \leq (\sin(x))^2 \leq 1$. Donc, par somme, $\boxed{x \leq f(x) \leq x+1}$.

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par comparaison (minoration) de fonctions, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = +\infty$. Par comparaison (majoration) de fonctions, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{(\sin(x))^2}{x}$.

   On sait que $0 \leq (\sin(x))^2 \leq 1$. Donc, par quotient puis somme, $\boxed{1 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq 1 + \dfrac{1}{x}}$.

   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$. Par le théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1}$.

Exercice 2.

1. On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) \text{ existe} &\iff 1 + x > 0\\
&\iff x > -1
\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc l'ensemble de définition de } f \text{ est }]-1,+\infty[}$.

   (b) f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$ donc f est dérivable sur $\mathcal{D}$.
   $\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.

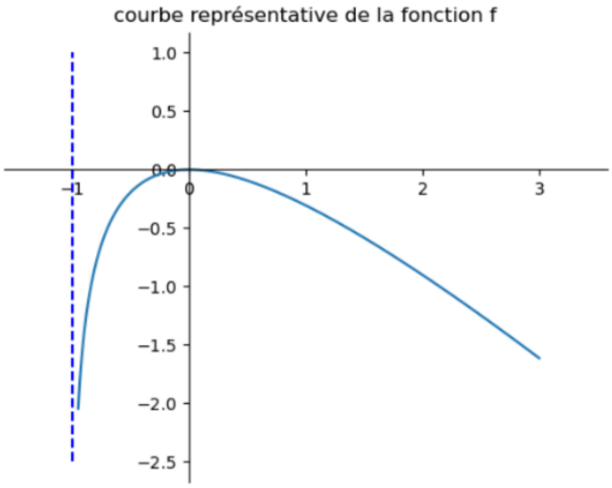
   (c) • Signe de f' : $f'(x)$ est du signe de $-x$ car $\forall x \in \mathcal{D},\ 1 + x > 0$.
   Ainsi, f est strictement croissante sur $]-1,0]$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.
   • Limite en -1 : $\lim\limits_{x\to-1}(1+x) = 0$ et $\lim\limits_{y\to0} \ln(y) = -\infty$ donc par composition des limites, $\lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty$.
   Ainsi, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$.
   Donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe.

• Limite en $+\infty$: nous devons factoriser car nous sommes en présence d'une forme indéterminée de la somme.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = -x\left(1 - \dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \dfrac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$ par quotient de limites.
Donc, par somme des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
Puis, par produit des limites, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

• Nous constatons que f présente un maximum en $x = 0$ donc il est intéressant de connaître sa valeur en 0. On trouve : $f(0) = 0$.
On en déduit le tableau de variations suivant.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

(d) On déduit de l'étude précédente le graphe de f.



2. D'après le tableau de variations, f admet un maximum en $x = 0$ et $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathcal{D},\ \ln(1+x) - x \leqslant 0$.
On en déduit : $\boxed{\forall x \in \mathcal{D},\ \ln(1+x) \leqslant x}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.
$\dfrac{1}{k} > 0$ donc $\dfrac{1}{k} \in]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer l'inégalité précédente à $\dfrac{1}{k}$: $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
Or $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$. Ainsi, $\boxed{\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}}$.

Exercice 3 - Trigonométrie.

1. **Questions préliminaires**

(a) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \dfrac{2+6+2\sqrt{12}}{4^2} = \dfrac{8+2\times 2\sqrt{3}}{4^2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$. Donc, puisque $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} > 0$:
$\boxed{\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.
De même, $\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ et $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} > 0$, donc $\boxed{\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

(b) D'après une formule de trigonométrie, $\boxed{\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}}$.

(c) Appliquons la formule précédente avec $\theta = \dfrac{\pi}{12}$. Sachant que $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{12} &= \frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}\\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

On en déduit deux valeurs possibles pour $\cos\dfrac{\pi}{12}$: $\cos\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$ ou $\cos\dfrac{\pi}{12} = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$.
Or $\cos\dfrac{\pi}{12} > 0$ car $\dfrac{\pi}{12} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel le cosinus est strictement positif.
Donc $\cos\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$. Ainsi, d'après la première question, $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.
Pour calculer $\sin\dfrac{\pi}{12}$, on utilise la formule de trigonométrie :
$\sin^2\dfrac{\pi}{12} + \cos^2\dfrac{\pi}{12} = 1$. Donc $\sin^2\dfrac{\pi}{12} = 1 - \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$. Or $\sin\dfrac{\pi}{12} > 0$ car $\dfrac{\pi}{12} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit :
$\sin\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$. D'où, d'après la première question : $\boxed{\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

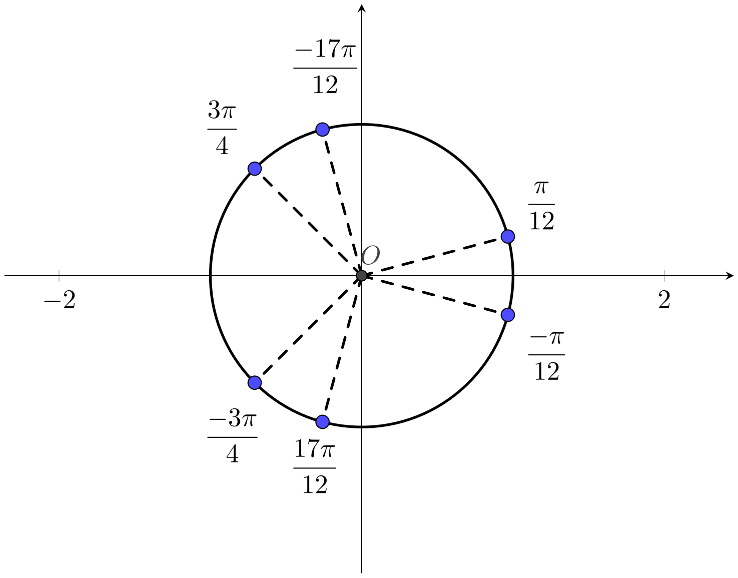
(d) $\dfrac{17\pi}{12} = 2\pi - \dfrac{7\pi}{12}$ donc $\cos\left(\dfrac{17\pi}{12}\right) = \cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
$\boxed{\text{Ainsi, } \cos\left(\dfrac{17\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.
$\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta$. Or $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.
Donc $\cos(3\theta) = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$. Puis, avec $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:
$\cos(3\theta) = 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta)$. D'où $\boxed{\cos 3\theta = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)}$.

3. (a) Tout réel x appartenant à $[-1, 1]$ peut s'écrire $x = \cos\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. Ainsi :
x est solution de $8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0$ si, et seulement si, $8\cos^3\theta - 6\cos(\theta) - \sqrt{2} = 0$.

$$\begin{aligned}8\cos^3\theta - 6\cos(\theta) - \sqrt{2} = 0 &\iff 2\left(4\cos^2\theta - 3\cos(\theta)\right) - \sqrt{2} = 0\\ &\iff 2\cos(3\theta) = \sqrt{2} \iff \cos(3\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\iff \cos(3\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\\ &\iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\end{aligned}$$

On représente alors les valeurs possibles pour θ sur le cercle trigonométrique (*) :



Ainsi, on peut affirmer que :

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \iff x = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ ou } x = \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right).$$

Remarque (*). Comme le cosinus est une fonction paire, il n'est pas nécessaire de considérer les autres angles.

Ainsi, sur $[-1,1]$, l'ensemble de solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_{[-1,1]} = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right\}}.$$

(b) Dans la question précédente, on a trouvé trois expressions pour les solutions. Il faut s'assurer que ces trois expressions sont bien différentes deux à deux.

$\frac{17\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi$ donc $\cos\frac{17\pi}{12} = \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Or $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{7\pi}{12} < \frac{3\pi}{4} < \pi$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$,

donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) < \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < \cos\left(\frac{9\pi}{12}\right)$. Ainsi, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) < \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) < \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Donc les trois solutions obtenues à la question précédentes sont deux à deux distinctes. Donc cette équation possède au-moins trois solutions.

Or on a admis qu'elle possède au-plus 3 solutions. On en déduit que l'équation possède exactement 3 solutions, qui sont celles obtenues à la question précédente. On a calculé les valeurs des cosinus au début de l'exercice. D'où l'ensemble des solutions de l'équation : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$.

Exercice 4.

1. **Première méthode.**

(a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^3.(a+b)\\ &= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)\\ &= a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3+a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}$.

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} \geq 0$. Donc,

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)}\right)^4 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{\cos(x)}^4 + 4\sqrt{\cos(x)}^3\sqrt{\sin(x)} + 6\sqrt{\cos(x)}^2\sqrt{\sin(x)}^2 + 4\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)}^3 + \sqrt{\sin(x)}^4 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x)^2 + 4\cos(x)\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)} + 6\cos(x)\sin(x) + 4\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)}\sin(x) + \sin(x)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 4\cos(x)\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)} + 6\cos(x)\sin(x) + 4\sqrt{\cos(x)}\sqrt{\sin(x)}\sin(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0
\end{aligned}$$

En divisant par 2, on obtient que $\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ est équivalente à l'équation } (E')}$.

(c)
- Si $x = 0$, $2\cos(0) + 3\sqrt{\cos(0)\sin(0)} + 2\sin(0) = 2 > 0$.
- Si $x = \frac{\pi}{2}$, $2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 > 0$.
- si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $2\cos(x) > 0$, $\sqrt{\sin(x)} > 0$, $\sqrt{\cos(x)} > 0$ et $\sin(x) > 0$.
  Par somme de réels strictement positifs, $2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0$

Finalement, $\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ 2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0.}$.

(d) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{\cos(x)\sin(x)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}}$.

2. **Deuxième méthode.**

(a) Soit $a \in]0, 1[$. $a^2 - \sqrt{a} = a^2 - a^{1/2}$.
Or, la fonction $x \mapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ car $a \in]0, 1[$. Donc, $a^2 - a^{1/2} < 0$.
Donc, $\boxed{a^2 < \sqrt{a}}$.

(b) Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. $1 > \cos(x) > 0$ et $1 > \sqrt{\sin(x)} > 0$.
Par la question précédente, $\sqrt{\cos(x)} > (\cos(x))^2$ et $\sqrt{\sin(x)} > (\sin(x))^2$.
Par somme d'inégalités, $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2$.
Donc, $\boxed{\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > 1}$.

(c) D'après la question précédente, l'équation (E) n'a pas de solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Il reste à vérifier pour 0 et $\frac{\pi}{2}$.
- Pour $x = 0$, $\sqrt{\cos(0)} + \sqrt{\sin(0)} = 1$.
- Pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$.

Donc, $\boxed{S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}}$.