BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°2

Samedi 5 octobre 2024

– Ensembles, Étude de fonctions et trigonométrie. –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 – Calculs.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) < 2\sqrt{x}$.
2. Résoudre $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.
3. Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + (\sin(x))^2$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq f(x) \leq x+1$.
   (b) En déduire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 2 - Étude de fonction

1. On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f. On note $\mathscr{D}$ cet ensemble.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer f'.
   (c) Dresser le tableau de variations de f. On calculera les limites aux bornes de $\mathscr{D}$ et les valeurs en le(s) point(s) particulier(s). On montrera en particulier que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   (d) Tracer l'allure du graphe de f.
2. Déduire des questions précédentes que $\forall x \in \mathscr{D},\ \ln(1+x) \leqslant x$.
3. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ln(1+k) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

Exercice 3 - Trigonométrie.

1. **Questions préliminaires**
   (a) Montrer que $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et que $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.
   (c) Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ puis que $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
   (d) En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$. On dessinera un cercle trigonométrique et on y placera les angles appropriés

2. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.
3. On veut résoudre l'équation :

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \qquad \text{(E)}.$$

   On admet que cette équation admet au plus trois solutions.

   (a) Rechercher les solutions de cette équation sur $[-1,1]$, en posant $x = \cos(\theta)$. On exprimera les solutions sous forme de cosinus.

   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E). On exprimera les solutions avec des racines.

Exercice 4 – Équation trigonométrique.

On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définie par

$$\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1 \qquad \text{(E)}$$

On propose de résoudre cette équation de deux manières différentes. **Les questions 1. et 2. suivantes sont donc totalement indépendantes**.

1. **Première méthode.**

   (a) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

   (b) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E′) suivant.

$$\sqrt{\cos(x)\sin(x)}\left(2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x)\right) = 0 \qquad \text{(E}'\text{)}$$

   (c) Justifier que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $2\cos(x) + 3\sqrt{\cos(x)\sin(x)} + 2\sin(x) > 0$.
   Indication : On pourra faire une disjonction de cas.

   (d) En déduire les solutions de l'équation (E).

2. **Deuxième méthode.**

   (a) Démontrer que $\forall a \in]0,1[,\ \sqrt{a} > a^2$.

   (b) En déduire que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} > 1$.

   (c) Retrouver les solutions de l'équation (E).