Chapitre 07 – Calculs de sommes et de produits (prof – 6h30)

Table des matières

1 Définitions et premiers exemples

1.1 Symbole $\sum$

Définition 1.

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.
La somme de tous les réels x_k pour k variant de m à n se note

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{n-1} + x_n$$

On trouve aussi les notations suivantes

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{m \leq k \leq n} x_k = \sum_{k \in [\![m,n]\!]} x_k$$

Exemple 2.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{12} 1 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 12.$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i = \underbrace{1}_{i=1} + \underbrace{2}_{i=2} + \underbrace{3}_{i=3} + \underbrace{4}_{i=4} + \underbrace{5}_{i=5} = 15.$

Remarque 3.

1. Cette notation se lit comme dans une boucle `for` en informatique.
2. Par convention, lorsque $m > n$, la somme est vide et vaut 0.
3. Dans la somme, l'indice k est une **variable muette**.
4. En dehors de la somme, l'indice k n'existe pas.

Exemple 4. Chercher l'erreur dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{k} x_k$.

L'entier k est à la fois l'indice muet e la somme et à la fois le dernier rang pour la somme.

1.2 Sommes usuelles

Théorème 5 (Somme de constantes)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} a = na$$

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}$. On raisonne par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"} \sum_{k=1}^{n} a = na \text{"}$$

I Pour $n = 1$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} a = a$ et $1 \times a = a$ donc $P(1)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$$\sum_{k=1}^{n+1} a = \sum_{k=1}^{n} a + a \underset{\text{HR}}{=} na + a = (n+1)a$$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)$ est vraie. ■

Remarque 6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a$.

Théorème 7 (Somme des entiers de 1 à n)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration : On raisonne également par récurrence.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{"}$$

I Pour $n = 1$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \underset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)$ est vraie. ■

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k$.

Théorème 9 (Somme des carrés des entiers de 1 à n)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration : On raisonne également par récurrence.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{"}$$

I Pour $n = 1$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \underset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$
D'autre part,
$$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)$ est vraie. ■

Théorème 10 (Somme géométrique).

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

Démonstration : On a besoin d'outils vus plus loin. ■

Exemple 11. Soit $n \geq 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

2 Règles de calculs

2.1 Relation de Chasles

Théorème 12 (Relation de Chasles).

Soit $(m,n,p) \in \mathbb{N}^3$ avec $m \leq p \leq n$.
Soient $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{n} x_k$$

Démonstration : Soit $(m,n,p) \in \mathbb{N}^3$ avec $m \leq p \leq n$.
Soient $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = x_m + \cdots + x_n = x_m + \cdots + x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n = \sum_{k=m}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{n} x_k$$ ■

Exemple 13. Soit $n \geq 5$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \min(k,5)$.

On va couper la somme à 5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \min(k,5) &= \sum_{k=1}^{5} \min(k,5) + \sum_{k=6}^{n} \min(k,5) \\
&= \sum_{k=1}^{5} k + \sum_{k=6}^{n} 5 \\
&= \frac{5\times 6}{2} + 5(n-6+1) \\
&= 5n - 10 = 5(n-2)
\end{aligned}$$

Exemple 14. Soit $n \geq 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

On va couper la somme selon que l'indice est pair ou impair.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor &= \sum_{\ell=1}^{n} \left\lfloor \frac{2\ell}{2} \right\rfloor + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{2\ell+1}{2} \right\rfloor \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left\lfloor \ell + \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= n^2
\end{aligned}$$

2.2 Linéarité

Théorème 15 (Linéarité)**.**

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ une famille de réels. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k) &= \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k \\
\sum_{k=m}^{n} (\lambda y_k) &= \lambda \sum_{k=m}^{n} y_k
\end{aligned}$$

Démonstration : Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^3$ avec $m \leq p \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k) = x_m + y_m + \cdots + x_n + y_n = x_m + \cdots + x_n + y_m + \cdots + x_n = \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda y_k) = \lambda y_m + \cdots + \lambda y_n = \lambda(y_m + \cdots + y_n) = \lambda \sum_{k=m}^{n} y_k$$

■

Exemple 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$.

Démonstration :

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2$$

■

Exemple 17. Soit $n \geq 1$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (8 - 2k + 6k^2)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(8-2k+6k^2) &= \sum_{k=1}^{n}8-2\sum_{k=1}^{n}k+6\sum_{k=1}^{n}k^2\\ &= 8n-2\frac{n(n+1)}{2}+6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= 8n-n(n+1)+n(n+1)(2n+1)\\ &= 2n^3+2n^2+8n=2n(n^2+n+8)\end{aligned}$$

2.3 Sommes télescopiques

Théorème 18 (Sommes télescopiques)**.**

Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $m\leq n$.
Soient $x_m,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{i=m}^{n}(x_{i+1}-x_i)=x_{n+1}-x_m \quad,\quad \sum_{i=m}^{n}(x_i-x_{i+1})=x_m-x_{n+1}$$

Démonstration :

$$\sum_{i=m}^{n}(x_{i+1}-x_i)=x_{m+1}-x_m+x_{m+2}-x_{m+1}+\cdots+x_n-x_{n-1}+x_{n+1}-x_n=x_{n+1}-x_m$$

■

Exemple 19. Calculer $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

On a déjà démontré que $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Exemple 20. Calculer $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Théorème 21 (Somme géométrique)**.**

Soit $q\in\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Si $q\neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. Si $q=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}q^k=n+1$.

Démonstration : 1. Soit $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

$$\begin{array}{rcl} S - qS & = & \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k \\ (1-q)S & = & \sum_{k=0}^{n} \left(q^k - q^{k+1}\right) \\ & = & 1 - q^{n+1} \\ \text{donc, } S & = & \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{array}$$

2. Si $q = 1$, $S = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. ■

2.4 Changement d'indice

Remarque 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^2$$

Exemple 23. Proposer une autre écriture de $\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3$.

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 = \sum_{k=0}^{n-1} k^3$$

Methode 1 (Changement d'indice)**.**

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

Le changement d'indice $j = k + 1$ se fait en **3 étapes** :

$$k \in [\![m, n]\!] \underset{j=k+1}{\Leftrightarrow} j \in [\![m+1, n+1]\!]$$

1. Changement de l'indice inférieur de la somme : $k = m$ devient $j = m + 1$
2. Changement de l'indice supérieur de la somme : $k = n$ devient $j = n + 1$
3. Changement de l'indice dans le terme général : x_{k+1} devient x_j

$$\sum_{k=m}^{n} x_{k+1} = \sum_{j=m+1}^{n+1} x_j$$

Exemple 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une autre écriture de $\sum_{k=2}^{n+1} x_{k-2}$.

On applique le changement de variable $j = k - 2 \Leftrightarrow k = j + 2$.

1. La borne inférieure devient $j = 2 - 2 = 0$.
2. La borne supérieure devient $j = n + 1 - 2 = n - 1$.
3. Le terme général x_{k-2} devient $x_{j+2-2} = x_j$.

$$\sum_{k=2}^{n+1} x_{k-2} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j$$

Théorème 25 (Sommes télescopiques)**.**

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{i=m}^{n} (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_m \quad , \quad \sum_{i=m}^{n} (x_i - x_{i+1}) = x_m - x_{n+1}$$

Démonstration : Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} (x_{i+1} - x_i) &= \sum_{i=m}^{n} x_{i+1} - \sum_{i=m}^{n} x_i \\
&= \sum_{j=m+1}^{n+1} x_j - \sum_{i=m}^{n} x_i \\
&= x_{n+1} + \sum_{j=m+1}^{n} x_j - \left(x_m + \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right) \\
&= x_{n+1} - x_m
\end{aligned}$$

■

Théorème 26.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n - m + 1)a$$

Démonstration : On va faire commencer la somme à 1 pour appliquer le théorème 6.
On applique donc le changement de variable $j = k - m + 1$.

1. La borne inférieure devient $j = m - m + 1 = 1$.
2. La borne supérieure devient $j = n - m + 1$.
3. Le terme général a devient a.

$$\sum_{k=m}^{n} a = \sum_{j=1}^{n-m+1} a = (n - m + 1)a$$

■

Théorème 27.

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

1. Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = n - m + 1$.
2. Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}$.

Démonstration : Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

1. Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$.
2. On va faire commencer les sommes à 0 pour appliquer le théorème 8.
   On applique donc le changement de variable $j = k - m$.
   - La borne inférieure devient $j = m - m = 0$.
   - La borne supérieure devient $j = n - m$.
   - Le terme général q^k devient $q^{j+m} = q^j.q^m$.

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{j=0}^{n-m} q^m.q^j = q^m \sum_{j=0}^{n-m} q^j = q^m.\frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$

■

3 Sommes doubles

3.1 Définitions

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

k	1	2	...	n
	x_1	x_2	...	x_n

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ peut se comprendre comme la somme des termes inscrits dans une ligne d'un tableau.

• Si le tableau contient deux lignes,

k	1	2	...	n
	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,n}$
	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,n}$

la somme de tous les éléments du tableau devient $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{1,k} + \sum_{k=1}^{n} x_{2,k}$.

• Si le tableau contient trois lignes,

k	1	2	...	n
	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,n}$
	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,n}$
	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	...	$x_{3,n}$

la somme de tous les éléments du tableau devient $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{1,k} + \sum_{k=1}^{n} x_{2,k} + \sum_{k=1}^{n} x_{3,k} = \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{k=1}^{n} x_{\ell,k}$.

3.2 Sur un rectangle

Théorème 28 (Somme sur un rectangle)**.**

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $(x_{j,k}, 0 \leq j \leq m,\ \ 0 \leq k \leq n)$ une famille de réels.

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\dots$	$x_{1,n}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\dots$	$x_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$\dots$	$x_{m,n}$

La somme de tous les éléments du tableau se note $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\0\leq k\leq n}} x_{j,k}$ et on peut la calculer de deux façons.

- On additionne les termes de chaque colonne k, $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{m} x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\0\leq k\leq n}} x_{j,k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} x_{j,k}\right)$$

- On additionne les termes de chaque ligne j, $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\0\leq k\leq n}} x_{j,k} = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n} x_{j,k}\right)$$

Exemple 29. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\0\leq k\leq n}} 2^{k+j}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\0\leq k\leq n}} 2^{k+j} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} 2^{k+j}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k\sum_{j=0}^{m} 2^{j}\right) = \sum_{k=0}^{n} 2^k.\frac{1-2^{m+1}}{1-2} \\
&= \left(2^{m+1}-1\right).\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (2^{n+1}-1)(2^{m+1}-1)
\end{aligned}$$

3.3 Sur un triangle

Théorème 30 (Somme sur un triangle)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x_{j,k}\ ,\ 0 \leq j \leq k \leq n)$ une famille de réels.

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\ldots$	$\ldots$	$x_{1,n}$
	$x_{2,2}$	$\ldots$	$\ldots$	$x_{2,n}$
		$x_{3,3}$	$\ddots$	$\vdots$
			$\ddots$	
				$x_{n,n}$

La somme de tous les éléments du tableau se note $\displaystyle\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} x_{i,j}$ et on peut la calculer de deux façons.

- On additionne les termes de chaque colonne k, $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{k} x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} x_{j,k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} x_{j,k}\right)$$

- On additionne les termes de chaque ligne j, $\displaystyle\left(\sum_{k=j}^{n} x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} x_{j,k} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} x_{j,k}\right)$$

Exemple 31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{j}{k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{j}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} . \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) \\
&= \frac{n(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

4 Calculs de produits

4.1 Symbole $\prod$

Définition 32.

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.
Le produit de tous les réels x_k pour k variant de m à n se note

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = x_m \times x_{m+1} \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n$$

On trouve aussi les notations suivantes

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = \prod_{m \leq k \leq n} x_k = \prod_{k \in [\![m,n]\!]} x_k$$

Exemple 33.

- $\displaystyle\prod_{i=1}^{12} 1 = 1$.
- $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \leq n \Rightarrow \displaystyle\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}$.

Remarque 34.

1. Cette notation se lit comme dans une boucle `for` en informatique.
2. Par convention, lorsque $m > n$, le produit est vide et vaut 1.
3. Dans le produit, l'indice k est une **variable muette**.
4. En dehors du produit, l'indice k n'existe pas.

4.2 Produits usuels

Théorème 35.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

$$\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}$$

Définition 36.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle factorielle de n et on note $n!$ le produit $n! = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} i$.

Par convention, $0! = 1$.

Théorème 37.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = n! \times (n+1) \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

4.3 Règles de calculs

Théorème 38 (Relation de Chasles)**.**

Soit $(m,n,p) \in \mathbb{N}^3$ avec $m \leq p \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = \left(\prod_{k=m}^{p} x_k\right) \times \left(\prod_{k=p+1}^{n} x_k\right)$$

Théorème 39 (Multiplicativité)**.**

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ une famille de réels. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \prod_{k=m}^{n} (x_k . y_k) &= \prod_{k=m}^{n} x_k \times \prod_{k=m}^{n} y_k \\ \prod_{k=m}^{n} (\lambda y_k) &= \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} y_k \end{aligned}$$

Théorème 40 (Produits télescopiques)**.**

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels **non nuls**.

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_m} \quad , \quad \prod_{k=m}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_m}{x_{n+1}}$$

Methode 2 (Changement d'indice)**.**

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

Le changement d'indice $j = k+1$ se fait en **3 étapes** :

$$k \in [\![m,n]\!] \underset{j=k+1}{\Leftrightarrow} j \in [\![m+1, n+1]\!]$$

1. Changement de l'indice inférieur du produit : $k = m$ devient $j = m+1$
2. Changement de l'indice supérieur du produit : $k = n$ devient $j = n+1$
3. Changement de l'indice dans le terme général : x_{k+1} devient x_j

$$\prod_{k=m}^{n} x_{k+1} = \prod_{j=m+1}^{n+1} x_j$$

5 Coefficients binomiaux

5.1 Définitions et propriétés

Définition 41.

Soit n un entier naturel non nul et $k \leq n$.
On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{k}$ l'entier défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pour $k > n$ ou $k < 0$, par convention, $\binom{n}{k} = 0$.

Exemple 42. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Théorème 43 (Symétrie des coefficients binomiaux)**.**

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Démonstration : Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

■

5.2 Triangle de Pascal

Théorème 44.

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 < k \leq n$.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Démonstration : Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 < k \leq n$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!k}{k(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

■

Remarque 45. Avec cette formule, on peut calculer les coefficients binomiaux de proche en proche.

- <u>Pour $n = 0$</u> $\binom{0}{0} = 1$.
- <u>Pour $n = 1$</u> $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$.
- <u>Pour $n = 2$</u> $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0} = 1 + 1 = 2$ et $\binom{2}{2} = 1$.
- <u>Pour $n = 3$</u> $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = \binom{2}{1} + \binom{2}{0} = 2 + 1 = 3$, $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$.

<u>Remarque 46.</u> On peut représenter les coefficients binomiaux dans un tableau. C'est sa forme triangulaire qui donne le nom de *Triangle de Pascal*.

n \ p	0	1	2	3	...	p	
0	$\binom{0}{0} = 1$						
1	$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$					
2	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$				
3	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$			
$\vdots$	$\vdots$						
n	$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{1} = n$			$\binom{n}{p-1}$	$\binom{n}{p}$	
$n+1$	$\binom{n+1}{0} = 1$	$\binom{n+1}{1} = n+1$				$\binom{n+1}{p}$	

Théorème 47.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, k \leq n, \quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Démonstration : On raisonne par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; P(n) : \text{"}\forall k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \leq n, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}\text{"}$$

<u>I</u> Pour $n = 1$.
$\binom{1}{0} = 0 \in \mathbb{N}$ et $\binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$ donc $P(1)$ est vrai.

<u>H</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vrai. Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$.
Si $k = 0$, $\binom{n+1}{0} = 0 \in \mathbb{N}$.
Si $k = n+1$, $\binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}$.
Si $0 < k < n+1$, par le triangle de Pascal, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.
Or, par hypothèse de récurrence, $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k-1}$ sont des entiers. Donc, $\binom{n+1}{k}$ est aussi un entier.
Donc, $P(k+1)$ est vrai.

<u>C</u> Par le principe de récurrence, la propriété est vraie. ■

5.3 Binôme de Newton

Théorème 48.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On va raisonner par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : "(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}"$$

I Pour $n = 0$:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1$ et $(a+b)^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vrai.

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice $\ell = k+1$ dans la première somme.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \underbrace{\binom{n}{n} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}}_{\ell=n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0} a^0 b^{n+1}}_{k=0} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \underbrace{\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0}_{k=n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}}_{k=0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Donc, $P(k+1)$ est vrai.

C Par le principe de récurrence, la propriété est vraie. ■

Exemple 49. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Théorème 50.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

Démonstration :

- On applique le binôme de Newton avec $a = b = 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k . 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

- On applique le binôme de Newton avec $a = 1$ et $b = -1$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k . 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$$

■