Exercice 1 Donner les formes algébriques des complexes suivants :

1. $z = 1 + 2\mathbf{i} - 2 - 4\mathbf{i}$
2. $z = (1 + 2\mathbf{i})(2 - 4\mathbf{i})$
3. $z = (2 - 4\mathbf{i})^2$.
4. $z = (1 + 2\mathbf{i})^3$
5. $z = \dfrac{1 + 2\mathbf{i}}{2 - 4\mathbf{i}}$.
6. $z = \dfrac{1}{2\mathbf{i}}$
7. $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \mathbf{i}^k$.

Exercice 2 On note $\mathbf{j} = \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer $\mathbf{j}^2$ puis $\mathbf{j}^3$.
2. Calculer $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{j}^n$.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{2021} \mathbf{j}^k$.

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z = \overline{z}$
2. $2z + 3\overline{z} = 1 - \mathbf{i}$.
3. $2\mathbf{i}z = 1 - z$
4. $2\overline{z} = 1 + 2\mathbf{i}$.

Exercice 4 Résoudre graphiquement les équations ou inéquations suivantes

1. $|z| = 2$
2. $|z| \leq 2$.
3. $2 < |z| \leq 5$.
4. $|z - 2| = 4$
5. $|z + 2\mathbf{i}| \leq 1$

Exercice 5 Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$
2. $z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}$.
3. $z = 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \times 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$
4. $z = \dfrac{3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}}$

Exercice 6 Donner le module et un argument des complexes suivants puis la forme exponentielle.

1. $z = 4\mathbf{i}$
2. $z = -2$.
3. $z = \sqrt{3} + \mathbf{i}$
4. $z = 1 - \sqrt{3}\mathbf{i}$.
5. $z = \dfrac{1}{1 - \mathbf{i}}$.
6. $z = \dfrac{4\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$

Exercice 7 Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3 + \mathbf{i}\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - \mathbf{i}\sqrt{8}$. On pose $Z = \dfrac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.
2. En déduire une forme exponentielle de Z.
3. Déterminer la forme algébrique de Z.

Exercice 8 Dans cet exercice, on note $w = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}$, $a = w + w^4$ et $b = w^2 + w^3$.

1. Calculer w^5.
2. Exprimer a et b en fonction de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
3. Exprimer $a + b + 1$ sous forme de somme et en déduire la valeur.
4. En déduire $a + b$ et ab.
5. De quelle équation les complexes a et b sont-ils solutions ?
6. Résoudre cette équation.
7. En déduire $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ puis $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 9 Linéariser ou exprimer sous forme de polynômes trigonométriques les expressions suivantes.

1. $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$
2. $\sin^3(3\theta)$
3. $\cos(4\theta)$
4. $\sin(5\theta)$

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes

1. $z^2 - 4z + 4 = 0$
2. $z^2 = -4$
3. $2z^2 + 3z - 5 = 0.$

Exercice 11 [*] *Egalité du parallélogramme*

Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a|^2 + |b|^2 = \dfrac{1}{2}\left(|a-b|^2 + |a+b|^2\right).$

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 2\cos a \sin b = \sin(a+b) + \sin(b-a)$$
2. Simplifier
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta}.$$
(on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de θ)
3. Déterminer la partie réelle de S_n.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

Exercice 13 On propose de résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
$$(E)\ :\ z^3 - 6z + 4 = 0$$

1. On considère z une solution de (E).
Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $z = u + v$ et $uv = 2$.
   (a) Déterminer u^3v^3.
   (b) Exprimer $(u+v)^3$ de deux manières différentes.
   (c) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.
   (d) Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.
   (e) Résoudre cette équation et en déduire les valeurs possibles pour u^3.
2. On pose $w = -2 + 2\mathbf{i}$ et on note $\mathbf{j} = \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Donner l'écriture exponentielle de w, de $1 + \mathbf{i}$ et de $\mathbf{j}$.
   (b) Montrer que les complexes $1 + \mathbf{i}$, $(1+\mathbf{i})\mathbf{j}$ et $(1+\mathbf{i})\mathbf{j}^2$ sont solutions de $Z^3 = w$.
   On admet que ce sont les seuls.
3. En déduire les 6 valeurs possibles pour u. On exprimera les réponses en fonctions des
complexes $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$.
On peut alors en déduire les valeurs possibles de v puis celles de z, on ne demande pas de le faire.