Exercice 1 Donner les formes algébriques des complexes suivants :

1. $z = 1 + 2\mathbf{i} - 2 - 4\mathbf{i}$
2. $z = (1 + 2\mathbf{i})(2 - 4\mathbf{i})$
3. $z = (2 - 4\mathbf{i})^2$.
4. $z = (1 + 2\mathbf{i})^3$
5. $z = \dfrac{1 + 2\mathbf{i}}{2 - 4\mathbf{i}}$.
6. $z = \dfrac{1}{2\mathbf{i}}$
7. $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \mathbf{i}^k$.

Correction

1. $z = 1 + 2\mathbf{i} - 2 - 4\mathbf{i} = -1 - 2\mathbf{i}$
2. $z = (1 + 2\mathbf{i})(2 - 4\mathbf{i}) = 10$
3. $z = (2 - 4\mathbf{i})^2 = -14 - 8\mathbf{i}$.
4. $z = (1 + 2\mathbf{i})^3 = 1 + 3(2\mathbf{i})^2 + 3(2\mathbf{i}) + (2\mathbf{i})^3 = 1 - 12 + 6\mathbf{i} - 8\mathbf{i} = -11 - 2\mathbf{i}$.
5. $z = \dfrac{1 + 2\mathbf{i}}{2 - 4\mathbf{i}} = \dfrac{(1 + 2\mathbf{i})(2 + 4\mathbf{i})}{(2 - 4\mathbf{i})(2 + 4\mathbf{i})} = \dfrac{-6 + 8\mathbf{i}}{20} = \dfrac{-3}{10} + \mathbf{i}\dfrac{2}{5}$.
6. $z = \dfrac{1}{2\mathbf{i}} = \dfrac{-2\mathbf{i}}{4} = \dfrac{-\mathbf{i}}{2}$
7. $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \mathbf{i}^k = \mathbf{i}\frac{1 - \mathbf{i}^{2022}}{1 - \mathbf{i}}$.
   Or, $i^4 = 1$ donc $i^{2022} = (i^4)^{505}.\mathbf{i}^2 = -1$.
   Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \mathbf{i}^k = \frac{2\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} = \frac{2\mathbf{i}(1 + \mathbf{i})}{2} = -1 + \mathbf{i}$

Exercice 2 On note $\mathbf{j} = \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer $\mathbf{j}^2$ puis $\mathbf{j}^3$.
   Correction $\mathbf{j}^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} = \bar{\mathbf{j}}$.
   $\mathbf{j}^3 = \mathbf{j}.\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}.\bar{\mathbf{j}} = |\mathbf{j}|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$.
2. Calculer $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2$.
   Correction $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 1 + \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1}{2} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{j}^n$.
   Correction Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$ alors $\mathbf{j}^n = (\mathbf{j}^3)^k = 1$.
   - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$ alors $\mathbf{j}^n = (\mathbf{j}^3)^k.\mathbf{j} = \mathbf{j}$.
   - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 2$ alors $\mathbf{j}^n = (\mathbf{j}^3)^k.\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}^2$.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{2021} \mathbf{j}^k$.
   Correction $\displaystyle\sum_{k=1}^{2021} \mathbf{j}^k = \mathbf{j}^1.\frac{1 - \mathbf{j}^{2021}}{1 - \mathbf{j}} = \mathbf{j}\frac{1 - \mathbf{j}^2}{1 - \mathbf{j}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = -1$.

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z = \overline{z}$
2. $2z + 3\overline{z} = 1 - \mathbf{i}$.
3. $2\mathbf{i}z = 1 - z$
4. $2\overline{z} = 1 + 2\mathbf{i}$.

Correction $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists (x, y) \in \mathbb{R},\quad z = x + \mathbf{i}y$.

1. $z=\overline{z} \Leftrightarrow x+\mathbf{i}y = x-\mathbf{i}y \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=-y \end{cases} \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.
2. $2z+3\overline{z}=1-\mathbf{i} \Leftrightarrow 2x+2\mathbf{i}y+3x-3\mathbf{i}y=1-\mathbf{i} \Leftrightarrow 5x-\mathbf{i}y=1-\mathbf{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=1 \\ -y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{5}+\mathbf{i}$.
3. $2\mathbf{i}z=1-z \Leftrightarrow z(1+2\mathbf{i})=1 \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{1+2\mathbf{i}} \Leftrightarrow z=\dfrac{1-2\mathbf{i}}{5}$.
4. $2\overline{z}=1+2\mathbf{i} \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{1+2\mathbf{i}}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{1-2\mathbf{i}}{2}$.

Exercice 4 Résoudre graphiquement les équations ou inéquations suivantes

1. $|z|=2$
2. $|z|\leq 2$.
3. $2<|z|\leq 5$.
4. $|z-2|=4$
5. $|z+2\mathbf{i}|\leq 1$

Correction
1. $|z|=2 \Leftrightarrow z\in C(0,2)$
2. $|z|\leq 2 \Leftrightarrow z$ appartient au disque de centre 0 et de rayon 2 $D(0,2)$.
3. $2\leq |z|\leq 5 \Leftrightarrow z\in D(0,5)\backslash D(0,2)$.
4. $|z-2|=4 \Leftrightarrow z\in C(2,4)$
5. $|z+2\mathbf{i}|\leq 1 \Leftrightarrow z$ appartient au disque de centre $-2\mathbf{i}$ et de rayon 1.

Exercice 5 Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z=2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$
2. $z=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}$.
3. $z=3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}\times 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$
4. $z=\dfrac{3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}}$

Correction On rappelle que $\forall\theta\in\mathbb{R},\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}=\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta)$.
1. $z=2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=2\mathbf{i}$.
2. $z=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}=\cos(\pi)=+\mathbf{i}\sin(\pi)=-1$.
3. $z=3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}\times 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}=6\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=6\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}=6\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=3\sqrt{3}+3\mathbf{i}$.
4. $z=\dfrac{3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}}=\dfrac{3}{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{3}{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}=\dfrac{3}{2}\mathbf{i}$.

Exercice 6 Donner le module et un argument des complexes suivants puis la forme exponentielle.

1. $z=4\mathbf{i}$
2. $z=-2$.
3. $z=\sqrt{3}+\mathbf{i}$
4. $z=1-\sqrt{3}\mathbf{i}$.
5. $z=\dfrac{1}{1-\mathbf{i}}$.
6. $z=\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$

Correction On commence par le module puis on reconnait un angle associé au point d'affixe $\dfrac{z}{|z|}$.

1. $|4\mathbf{i}|=4$ et $\dfrac{4\mathbf{i}}{|4\mathbf{i}|}=\dfrac{4\mathbf{i}}{4}=\mathbf{i}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $4\mathbf{i}=4\mathbf{e}^{i\frac{pi}{2}}$.
2. $|-2|=2$ et $\dfrac{-2}{|-2|}=-1=\cos(\pi)+\mathbf{i}\sin(\pi)$ donc $-2=2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}$.

3. $|\sqrt{3}+\mathbf{i}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$ et $\dfrac{\sqrt{3}+\mathbf{i}}{|\sqrt{3}+\mathbf{i}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathbf{i}\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ donc $\sqrt{3}+\mathbf{i} = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$.
4. $|1-\sqrt{3}\mathbf{i}| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$ et $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{|1-\sqrt{3}\mathbf{i}|} = \dfrac{1}{2}-\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)$ donc $1-\sqrt{3}\mathbf{i} = 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$.
5. $\left|\dfrac{1}{1-\mathbf{i}}\right| = \left|\dfrac{1+\mathbf{i}}{2}\right| = \dfrac{|1+\mathbf{i}|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\frac{1}{1-\mathbf{i}}}{\left|\frac{1}{1-\mathbf{i}}\right|} = \dfrac{\frac{1+\mathbf{i}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1+\mathbf{i}}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

   donc $\dfrac{1}{1-\mathbf{i}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$.
6. $\left|\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right| = \dfrac{|4\mathbf{i}|}{|1+\mathbf{i}|} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{4\mathbf{i}(1-\mathbf{i})}{2} = 2\mathbf{i}+2$.

   Donc, $\dfrac{\frac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}}{\left|\frac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right|} = \dfrac{2\mathbf{i}+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$.

<u>Exercice 7</u> Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3+\mathbf{i}\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8}-\mathbf{i}\sqrt{8}$. On pose $Z = \dfrac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle.
   <u>Correction</u>

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ z_1 &= 2\sqrt{3}\left(\frac{-3}{2\sqrt{3}}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\mathbf{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_2| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2+\sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ z_2 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_3| &= \sqrt{(\sqrt{8})^2+\sqrt{8}^2} = \sqrt{16} = 4 \\ z_3 &= 4\left(\frac{\sqrt{8}}{4}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{8}}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+\mathbf{i}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = 4\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}} \end{aligned}$$

2. En déduire une forme exponentielle de Z.
   <u>Correction</u> $Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6} = \frac{(2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{6}})^3(4\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}})^4}{(2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}})^6} = \frac{2^3.3\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}}4^4\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\pi}}{2^6.2^3\mathbf{e}^{\frac{6\mathbf{i}\pi}{3}}} = -12\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}}$
3. Déterminer la forme algébrique de Z.
   <u>Correction</u> $Z = -12\sqrt{3}i$.

<u>Exercice 8</u> Dans cet exercice, on note $w = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}$, $a = w+w^4$ et $b = w^2+w^3$.

1. Calculer w^5.
   <u>Correction</u> $w^5 = \left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}\right)^5 = 1$.

2. Exprimer a et b en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
   Correction
   $$a = w + w^4 = \mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{5}} + \left(\mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^4 = \mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\frac{8i\pi}{5}} = \mathbf{e}^{i\pi}(\mathbf{e}^{\frac{-3i\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\frac{3i\pi}{5}}) = -2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
   La dernière égalité vient de $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$.
   $$b = w^2 + w^3 = (\mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{5}})^2 + \left(\mathbf{e}^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^3 = \mathbf{e}^{\frac{4i\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\frac{6i\pi}{5}} = \mathbf{e}^{i\pi}(\mathbf{e}^{\frac{-i\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\frac{i\pi}{5}}) = -2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

3. Exprimer $a + b + 1$ sous forme de somme et en déduire la valeur.
   Correction
   $$a + b + 1 = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \sum_{k=0}^{4} w^k = \frac{1 - w^5}{1 - w} = 0$$

4. En déduire $a + b$ et ab.
   Correction $a + b = -1$.
   $ab = (w+w^4)(w^2+w^3) = w^3+w^4+w^6+w^7 = w^3+w^4+w^5.w+w^5.w^2 = w^3+w^4+w+w^2 = -1$.

5. De quelle équation les complexes a et b sont-ils solutions ?
   Correction a et b sont les deux solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.
6. Résoudre cette équation.
   Correction $\Delta = 1-(-4) = 5$. Il y a donc deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   Une de ces solutions est a et l'autre est b.
7. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
   Correction L'angle $\frac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran dons $a = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
   On a donc
   $$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} \end{aligned}$$
   Puisque l'angle $\frac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est un nombre positif donc on peut passer à la racine carrée.
   $$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Exercice 9 Linéariser ou exprimer sous forme de polynômes trigonométriques les expressions suivantes.

1. $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$
2. $\sin^3(3\theta)$
3. $\cos(4\theta)$
4. $\sin(5\theta)$

<u>Correction</u>

1. On applique les formules d'Euler pour le cosinus et le sinus

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) &= \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^2\left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-2+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{4}\right) \\
&= \frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}-2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-4-2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-4\mathbf{i}\theta}}{-16} \\
&= \frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-4\mathbf{i}\theta}-2}{-16} = \frac{1-\cos(4\theta)}{8}
\end{aligned}$$

   On peut également retrouver ce résultat avec les formules de trigonométrie classiques.
   On sait que : $\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$ et $\sin^2(\theta)=\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$.
   donc $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)=\dfrac{1}{4}\sin^2(2\theta)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1-\cos(4\theta)}{2}=\dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}$.

2.

$$\begin{aligned}
\sin^3(3\theta) &= \left(\frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^3 \\
&= \frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{e}^{6\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-6\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta}) = \frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta}) \\
&= \frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta}-3(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta})) = \frac{\sin(9\theta)-3\sin(3\theta)}{-4} = \frac{3\sin(3\theta)-\sin(9\theta)}{4}
\end{aligned}$$

3. Cette fois, on veut faire le travail dans l'autre sens et exprimer $\cos(4\theta)$ comme un polynôme en $cos(\theta)$.
   Pour cela, on utilise l'autre lien entre $\cos(\theta)$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$: $\cos(\theta)=\mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})$.

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}) = \mathrm{Re}((\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^4) = \mathrm{Re}[(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^4] \\
(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^4 &= \cos^4(\theta)+4\mathbf{i}\cos(\theta)\sin^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)-4\mathbf{i}\cos(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^4(\theta) \\
\cos(4\theta) &= \cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta) \\
&= \cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)(1-\cos^2(\theta))+(1-\sin^2(\theta))^2 \\
&= 8\cos^4(\theta)-8\cos^2(\theta)+1
\end{aligned}$$

4. On fait pareil et on utilise encore le binôme de Newton pour développer la puissance 5.

$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= \mathrm{Im}[(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^5] \\
(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^5 &= \cos^5(\theta)+5\mathbf{i}\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)-10\mathbf{i}\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4(\theta) \\
\sin(5\theta) &= 5\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta) \\
&= 5(1-\sin^2(\theta))^2\sin(\theta)-10(1-\sin^2(\theta))\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta) \\
&= 16\sin^5(\theta)-20\sin^3(\theta)+5\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes

1. $z^2 - 4z + 4 = 0$
2. $z^2 = -4$
3. $2z^2 + 3z - 5 = 0$.

Correction

1. $z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$ donc l'équation admet une unique solution $z = 2$.
2. $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (2\mathbf{i})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 2\mathbf{i})(z + 2\mathbf{i}) = 0 \Leftrightarrow z = 2\mathbf{i}$ ou $z = -2\mathbf{i}$.
3. $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$. L'équation admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-3 + \mathbf{i}\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - \mathbf{i}\sqrt{31}}{4}$.

Exercice 11 [*] *Egalité du parallélogramme*
Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a|^2 + |b|^2 = \dfrac{1}{2}\left(|a-b|^2 + |a+b|^2\right)$.

Correction Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(|a-b|^2 + |a+b|^2\right) &= \frac{1}{2}\left((a-b)\overline{(a-b)} + (a+b)\overline{(a+b)}\right) = \frac{1}{2}\left((a-b)(\overline{a} - \overline{b}) + (a+b)(\overline{a} + \overline{b})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a\overline{a} - a\overline{b} - b\overline{a} + \overline{b}b + a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + \overline{b}b\right) = \frac{1}{2}\left(2|a|^2 + 2|b|^2\right) = |a|^2 + |b|^2
\end{aligned}$$

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 2\cos a \sin b = \sin(a+b) + \sin(b-a)$$

   Correction Soient a et b deux réels.
   $\sin(a-b) + 2\cos a \sin b = \sin a \cos b - \sin b \cos a + 2\cos a \sin b = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin(a+b)$

2. Simplifier
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta}.$$
   (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de θ)
   Correction Si $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = 1$, on a $\boxed{S_n = n+1}$.
   Sinon, d'après la formule de somme géométrique, $\boxed{S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta} = \frac{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta}}{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}}$

3. Déterminer la partie réelle de S_n.
   Correction On factorise par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta}}{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} &= \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta/2}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}(n+1)\theta/2} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta/2}\right)}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta/2}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta/2} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta/2}\right)} \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}.\frac{-2\mathbf{i}\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta)}{2}\right)}{-2\mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\theta)}{2}\right)} \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}.\frac{\sin\left(\dfrac{(n+1)\theta)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(S_n) &= \mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}.\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

On applique ensuite la question préliminaire avec $a=\frac{n\theta}{2}$ et $b=\frac{(n+1)\theta}{2}$ et on obtient

$$\mathrm{Re}(S_n)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

D'où, $\boxed{\mathrm{Re}(S_n)=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$.

<u>Correction</u> $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(S_n\right)$ donc si $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}=1$, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=n+1}$.

Sinon, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$.

<u>Exercice 13</u> On propose de résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

$$(E)\ :\ z^3-6z+4=0$$

1. On considère z une solution de (E). Soit $(u,v)\in\mathbb{C}^2$ tel que $z=u+v$ et $uv=2$.
   (a) Déterminer u^3v^3.
   (b) Exprimer $(u+v)^3$ de deux manières différentes.
   (c) En déduire la valeur de u^3+v^3.
   (d) Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $Z^2+4Z+8=0$.
   (e) Résoudre cette équation et en déduire les valeurs possibles pour u^3.
2. On pose $w=-2+2\mathbf{i}$ et on note $\mathbf{j}=\frac{-1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Donner l'écriture exponentielle de w, de $1+\mathbf{i}$ et de $\mathbf{j}$.
   (b) Montrer que les complexes $1+\mathbf{i}$, $(1+\mathbf{i})\mathbf{j}$ et $(1+\mathbf{i})\mathbf{j}^2$ sont solutions de $Z^3=w$. On admet que ce sont les seuls.

3. En déduire les 6 valeurs possibles pour u. On exprimera les réponses en fonctions des complexes $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$.
On peut alors en déduire les valeurs possibles de v puis celles de z, on ne demande pas de le faire.

Correction

1. (a) $u^3v^3 = (uv)^3 = 2^3 = 8$.
   (b) D'après la formule du binôme de Newton, $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$
   $= u^3 + v^3 + 6(u+v)$.
   D'autre part, $(u+v)^3 = z^3 = 6z - 4 = 6(u+v) - 4$.
   (c) En égalisant les deux expressions, on en déduit que $u^3 + v^3 = -4$.
   (d) u^3 et v^3 sont solutions de $(z-u^3)(z-v^3) = 0$. Or,
   $$(z-u^3)(z-v^3) = z^2 - zv^3 - zu^3 + u^3v^3 = z^2 - z(u^3+v^3) + u^3v^3 = z^2 + 4z + 8$$
   donc u^3 et v^3 sont solutions de $Z^2 + 4Z + 8 = 0$.
   (e) $\Delta = 16 - 4 \times 8 = -16 = (4\mathbf{i})^2$ donc il y a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-4+4\mathbf{i}}{2} = -2 + 2\mathbf{i}$ et $z_2 = \dfrac{-4-4\mathbf{i}}{2} = -2 - 2\mathbf{i}$. Donc, $u^3 = -2 + 2\mathbf{i}$ ou $u^3 = -2 - 2\mathbf{i}$.
2. On pose $w = -2 + 2\mathbf{i}$ et on note $\mathbf{j} = \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) $|w| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ donc $w = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{3\mathbf{i}\pi}{4}}$.
   $|1+\mathbf{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ donc $1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}$.
   $|\mathbf{j}| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$ donc $\mathbf{j} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$.
   (b) On écrit les complexes sous leur forme exponentielle pour simplifier le calcul de puissance.
   $(1+\mathbf{i})^3 = (\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}})^3 = \sqrt{2}^3(\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}})^3 = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{3\mathbf{i}\pi}{4}} = w$.
   $((1+\mathbf{i})\mathbf{j})^3 = (\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}})^3\mathbf{j}^3 = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{3\mathbf{i}\pi}{4}}(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}})^3 = w \times \mathbf{e}^{2\mathbf{i}\pi} = w$.
   $((1+\mathbf{i})\mathbf{j}^2)^3 = (\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}})^3\mathbf{j}^6 = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{3\mathbf{i}\pi}{4}}(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}})^6 = w \times \mathbf{e}^{4\mathbf{i}\pi} = w$.
   Donc, les complexes $1 + \mathbf{i}$, $(1+\mathbf{i})\mathbf{j}$ et $(1+\mathbf{i})\mathbf{j}^2$ sont bien solutions de $Z^3 = w$.
3. On avait obtenu $u^3 = -2 + 2\mathbf{i} = w$ ou $u^3 = -2 - 2\mathbf{i} = \overline{w}$.
   Par la question précédente,
   $$u^3 = w \Leftrightarrow u = 1 + \mathbf{i} \text{ ou } u = (1+\mathbf{i})\mathbf{j} \text{ ou } u = (1+\mathbf{i})\mathbf{j}^2$$
   On remarque ensuite que $u^3 = \overline{w} \Leftrightarrow (\overline{u})^3 = w$ donc
   $$\begin{aligned} u^3 = \overline{w} &\Leftrightarrow \overline{u} = 1 + \mathbf{i} \text{ ou } \overline{u} = (1+\mathbf{i})\mathbf{j} \text{ ou } \overline{u} = (1+\mathbf{i})\mathbf{j}^2 \\ &\Leftrightarrow u = \overline{1+\mathbf{i}} \text{ ou } u = \overline{(1+\mathbf{i})\mathbf{j}} \text{ ou } u = \overline{(1+\mathbf{i})\mathbf{j}^2} \\ &\Leftrightarrow u = 1 - \mathbf{i} \text{ ou } u = (1-\mathbf{i})\overline{\mathbf{j}} \text{ ou } u = (1-\mathbf{i})\overline{\mathbf{j}^2} \end{aligned}$$
   Finalement, $u \in \left\{1 + \mathbf{i},\ (1+\mathbf{i})\mathbf{j},\ (1+\mathbf{i})\mathbf{j}^2,\ 1 - \mathbf{i},\ (1-\mathbf{i})\overline{\mathbf{j}},\ (1-\mathbf{i})\overline{\mathbf{j}}^2\right\}$.