Exercice 1 Déterminer graphiquement les ensembles suivants.

1. $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right]\right)$.
2. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{4}\right]\right)$.
3. $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
4. $\ln([1,\mathbf{e}[\cup[2\mathbf{e},+\infty[)$.
5. $\exp(\mathbb{R}^*)$.
6. $f([-5,1])$ pour $f : x \mapsto x^2$.

Exercice 2

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.
   (a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
   (b) $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$
   (c) $f(x) = |\sin(x)|$
2. Etudier le caractère bijectif de ces fonctions et la bijection réciproque lorsqu'elle existe.

Exercice 3 On considère l'application h définie par

$$h : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_h.
2. Déterminer $h(D_h)$.
3. Montrer que h est une bijection de D_h sur $h(D_h)$.
4. Donner sa bijection réciproque.

Exercice 4 On considère l'application g définie par

$$g : x \mapsto \sqrt{|x-1|+4}$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_g et $g(D_g)$.
2. L'application g est-elle injective sur D_g ?
3. Déterminer un intervalle sur lequel est l'est.

Exercice 5

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.
   (a) $f(n) = 2n + 1$.
   (b) $f(z) = \overline{z}$
   (c) $f(\theta) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$
2. Etudier le caractère bijectif de ces fonctions.

Exercice 6

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x, x+y, x+y+z) \end{cases}$
   (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Déterminer les antécédents par f de (a,b,c).
   (b) f est-elle bijective de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$.
2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x, y^2, z^2) \end{cases}$.
   Déterminer deux ensembles E et F tels que
   (a) f soit injectif de E dans F,
   (b) f soit surjectif de E dans F,
   (c) f soit bijectif de E dans F.

Exercice 7 On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ x \mapsto \dfrac{1+\mathbf{i}x}{1-\mathbf{i}x} \end{cases}$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Cette application est-elle injective sur D_f ? surjective de D_f dans $f(D_f)$?

<u>Exercice 8</u> Soient E, F et G trois ensembles.
Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective de E dans G alors f est injective de E dans F.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective de E dans G alors g est surjective de F dans G.

<u>Exercice 9</u> Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.
Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$