Devoir maison n°3 — Méthodes de calculs, Complexes et Applications. —

BCPST 1.1 & 1.2

Exercice 1 - Calculs.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j$.
2. Donner l'écriture trigonométrique des complexes suivants.
   (a) $z = 2-2\mathbf{i}$.
   (b) $z = \left(\dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^5$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\sin^3(\theta) = \dfrac{3\sin(\theta)-\sin(3\theta)}{4}$.
   (b) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right)$.

Exercice 2 – Sommes et complexes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Questions préliminaires.
   (a) Montrer que
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 2\cos a \sin b = \sin(a+b)+\sin(b-a)$$
   (b) *(non faisable sans les complexes)* Simplifier
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta}.$$
   (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de θ)
   (c) *(non faisable sans les complexes)* Déterminer la partie réelle de S_n.
   (d) *(non faisable sans les complexes)* En déduire
   $$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$
2. On suppose dans cette question que $\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} \neq 1$ ($x \notin \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$). On propose de calculer les sommes
   $$A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx).$$
   (a) Calculer $A_n + B_n$.
   (b) i. Montrer que $A_n - B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$.

   ii. En déduire une expression simplifiée de $A_n - B_n$.

  (c) En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n

3. On s'intéresse maintenant à la somme suivante $D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

  (a) Calculer $D_n(0)$.

  (b) On suppose dans cette question que $x \in]0;\pi[$.
  En utilisant les questions préliminaires, montrer que $D_n(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

  (c) Dans la suite, on considère le cas $n = 4$

   i. Déterminer les valeurs de $x \in [0,\pi]$ pour lesquelles $D_4(x) = 0$

   ii. Calculer $D_4\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $D_4\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $D_4\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $D_4\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 3 - Etude de fonctions.

1. Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{cases}$

  (a) Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}$.

  (b) Montrer que g est impaire. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de g?

  (c) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

  (d) Établir le tableau de variation de g. On justifiera précisément l'étude du signe de la dérivée et les calculs de limites.

  (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé. On prendra pour échelle 3cm pour 1 unité.

  (f) Déterminer l'ensemble image $g(\mathbb{R})$.

  (g) g est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

  (h) g est-elle surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

  (i) Déterminer en justifiant brièvement deux intervalles (pertinents) I et J tels que g soit bijective de I dans J.

2. On définit la fonction f par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

  (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.

  (b) Montrer que f définit une bijection de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer l'application réciproque f^{-1}.

  (c) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, exprimer $g \circ f^{-1}(y)$ à l'aide de f^{-1}, en fonction de y.
  En déduire une expression simple de $f \circ g \circ f^{-1}$

Exercice 4 - Applications.

Soient E, F, G trois ensembles et soient des applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Justifier que l'application $g \circ f$ est bien définie.

2. Montrer que si $g \circ f$ est injective de E dans G et f surjective de E dans F, alors g est injective de F dans G.

3. Montrer que si $g \circ f$ est surjective de E dans G et g injective de F dans G, alors f est surjective de E dans F.