Corrigé du devoir maison n° 3

— Méthodes de calculs, Complexes et Applications. —

Exercice 1 - Calculs.

1.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} 2^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(2^i.\frac{1-2^{n-i+1}}{1-2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2^i-2^i.2^{n-i+1}}{-1}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(2^{n+1}-2^i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} 2^i = n.2^{n+1} - 2.\frac{1-2^n}{1-2} = n2^{n+1}+2-2^{n+1}\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j = 2+(n-1)2^{n+1}}$.

2. (a) $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ donc $z = 2-2\mathbf{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc, $\boxed{z = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}}$.

(b) $\frac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \frac{\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}} = \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{2}}$. Donc, $\boxed{z = \mathbf{e}^{-\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}}}$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a)

$$\sin^3(\theta) = \sin^2(\theta).\sin(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}.\sin(\theta) = \frac{\sin(\theta)-\cos(2\theta)\sin(\theta)}{2}$$

Or, $\sin(\theta)\cos(2\theta) = \frac{\sin(3\theta)+\sin(-\theta)}{2}$. Donc,

$$\sin^3(\theta) = \frac{\sin(\theta) - \frac{\sin(3\theta)-\sin(\theta)}{2}}{2} = \frac{\sin(\theta)}{2} - \frac{\sin(3\theta)}{4} + \frac{\sin(\theta)}{4}$$

Finalement, $\boxed{\sin^3(\theta) = \frac{3\sin(\theta)-\sin(3\theta)}{4}}$.

(b) On applique la formule précédente avec $x = \frac{\theta}{3^k}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 3^k\sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4}\left[3\sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{3^k}\right)\right]\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[3^{k+1}\sin\left(\frac{\theta}{3^k}\right) - 3^k\sin\left(\frac{\theta}{3^{k-1}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[3^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right) - 3^1\sin\left(\frac{\theta}{3^{1-1}}\right)\right]\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} 3^k\sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) = \frac{1}{4}\left[3^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right) - 3\sin(\theta)\right]}$.

Exercice 2 - Sommes et Complexes.

1. (a) Soient a et b deux réels.
$\sin(a-b) + 2\cos a\sin b = \sin a\cos b - \sin b\cos a + 2\cos a\sin b = \sin a\cos b + \sin b\cos a = \sin(a+b)$

(b) Si $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = 1$, on a $\boxed{S_n = n+1}$.

Sinon, d'après la formule de somme géométrique, $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta} = \frac{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta}}{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}}$

(c) On factorise par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta}}{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} &= \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta/2}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}(n+1)\theta/2}-\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta/2}\right)}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta/2}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta/2}-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta/2}\right)} \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}.\frac{-2\mathbf{i}\sin\left(\frac{(n+1)\theta)}{2}\right)}{-2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta)}{2}\right)} \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}.\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta)}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(S_n) &= \mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}.\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

On applique ensuite la question préliminaire avec $a=\frac{n\theta}{2}$ et $b=\frac{(n+1)\theta}{2}$ et on obtient

$$\mathrm{Re}(S_n)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

D'où, $\boxed{\mathrm{Re}(S_n)=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$.

(d) $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}\left(S_n\right)$ donc si $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}=1$, on a $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=n+1}$.

Sinon, $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}}$.

2. (a) $A_n+B_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)+\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)=\sum_{k=0}^{n}\left(\cos^2(kx)+\sin^2(kx)\right)$ donc $\boxed{A_n+B_n=n+1}$.

(b) i. $A_n-B_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)-\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)=\sum_{k=0}^{n}\left(\cos^2(kx)-\sin^2(kx)\right)$ donc $\boxed{A_n-B_n=\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)}$.

ii. On applique la question préliminaire avec $\theta=2x$ et on en déduit que

$$A_n-B_n=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)2x\right)}{2\sin\left(\frac{2x}{2}\right)} \text{ donc } \boxed{A_n-B_n=\frac{1}{2}+\frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin(x)}}.$$

(c) On résout le système et on obtient $\boxed{A_n = \frac{1}{4} + \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)} + \frac{n+1}{2}}$ et $\boxed{B_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)}}$.

3. (a) $D_n(0) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(0)$ donc $\boxed{D_n(0) = 2n+1}$.

(b) On suppose dans cette question que $x \in]0, \pi[$.

$D_n(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = 1 + 2\left(\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) - 1\right) = 2\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) - 1.$

Or, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} \neq 1$ donc $\boxed{D_n(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$.

(c) i. $D_4(0) = 9$ et $D_4(\pi) = 1-2+2-2+2 = 1$ donc les solutions de l'équation appartiennent à $]0, \pi[$.

Soit $x \in]0, \pi[$.

$D_4(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin\left(\left(4+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{9x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{9x}{2} = k\pi$ et $x \in]0, \pi[$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{2k\pi}{9}$ et $x \in]0, \pi[$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{9}\right\}}$.

ii. $D_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ donc $\boxed{D_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$.

$D_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2} + 0 - \sqrt{2} - 2$ donc $\boxed{D_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1}$.

$D_4\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2} + 0 + \sqrt{2} - 2$ donc $\boxed{D_4\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1}$.

De même, $\boxed{D_4\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2}$.

Exercice 3 - Etude de fonctions.

1. (a) g est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (car $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 > 0$).

$\boxed{\text{Donc } g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-2x}{x^2+1} = -g(x)$. $\boxed{\text{Donc } g \text{ est impaire}}$. On en déduit que sa courbe représentative est invariante par symétrie centrale de centre O.

(c) g est une fraction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathbb{R}$.

Et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - (2x)^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

(d) Puisque g est impaire, on peut se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. On obtiendra ensuite toute la courbe à partir du tracé sur $\mathbb{R}_+$, en effectuant une symétrie centrale de centre O.

$g'(x)$ est du signe de $1 - x^2$. On en déduit le tableau de variation (sur $\mathbb{R}_+$) :

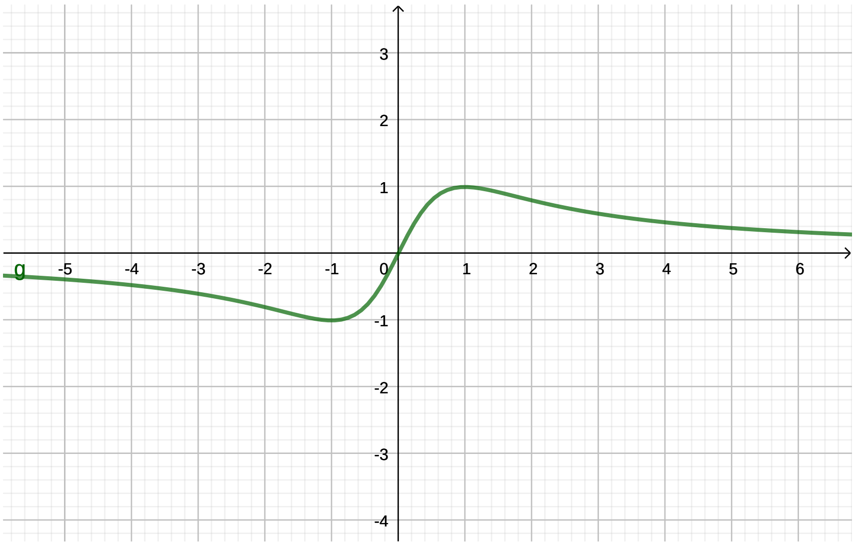
x	0		1	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Précisions sur les valeurs et limites :

En 0 : $g(0) = 0$

En $+\infty$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{2x}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{2}{x(1+\frac{1}{x^2})}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ par quotient des limites.

(e) On en déduit l'allure du graphe de g :



(f) D'après l'étude précédente (tableau de variation ou graphe), la fonction étant continue, $\boxed{g(\mathbb{R}) = [-1, 1]}$.

(g) $2 \neq \dfrac{1}{2}$ et $g(2) = g(\frac{1}{2})$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas injective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.

(h) 3 n'a pas d'antécédent par g dans $\mathbb{R}$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}}$.

(i) Posons $\boxed{I = [-1, 1] \text{ et } J = [-1, 1]}$. g est strictement croissante sur I donc injective de I dans J. De plus, J est l'ensemble image $g(I) = J$, donc g est surjective de I dans J.
Finalement, $\boxed{g \text{ est bijective de } I \text{ dans } J.}$

2. (a) $f(x)$ est défini si $(x + 1)$ et $(1 - x)$ sont de même signe et non nuls donc $\boxed{\mathcal{D} =]-1, 1[}$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé quelconque.
Étudions l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathcal{D}$: $f(x) = y$.
$f(x) = y \Leftrightarrow (e^y - 1) = x(e^y + 1)$.
Puisque $e^y + 1$ est non nul (>1), il y a une solution unique $x = \frac{e^y-1}{e^y+1}$. On vérifie que $x + 1 = \frac{2e^y}{e^y+1} > 0$ et $1 - x = \frac{2}{e^y+1} > 0$ donc cette solution est bien dans $\mathcal{D}$.
f est donc une bijection de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ et son application réciproque est :

$$\boxed{f^{-1} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ x & \mapsto & \frac{e^y-1}{e^y+1} \end{array} \right.}$$

(c) $\forall y \in \mathbb{R}, g \circ f^{-1}(y) = \frac{2(e^y-1)(e^y+1)}{(e^y-1)^2+(e^y+1)^2} = f^{-1}(2y)$ donc $\boxed{f \circ g \circ f^{-1} = 2id_{\mathbb{R}}}$ où $id_{\mathbb{R}}$ est l'identité de $\mathbb{R}$/

Exercice 4 - Applications.

Soient E, F, G trois ensembles et soient des applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. L'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de g, donc $\boxed{\text{l'application } g \circ f \text{ est bien définie}}$.
2. On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective.
Montrons que g est injective (c'est à dire que $\forall (x, x') \in F^2,\ g(x) = g(x') \Longrightarrow x = x'$).
Soient $(x, x') \in F^2$ fixés quelconques tels que $g(x) = g(x')$ (*).
$x \in F$ et $f : E \to F$ est surjective, donc il existe $t \in E$ tel que $f(t) = x$.
De même, $x' \in F$ et $f : E \to F$ est surjective, donc il existe $t' \in E$ tel que $f(t') = x'$.
À partir de l'égalité (*), on obtient donc $g(f(t)) = g(f(t'))$, c'est à dire $g \circ f(t) = g \circ f(t')$. Or $g \circ f$ est injective. On en déduit $t = t'$. D'où $f(t) = f(t')$, c'est à dire $x = x'$.
$\boxed{\text{On en déduit que } g \text{ est injective}}$.
3. On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective.
Montrons que f est surjective (c'est à dire : $\forall y \in F,\ \exists x \in E : f(x) = y$).
Soit $y \in F$ fixé quelconque. On peut lui appliquer $g : F \to G$ (car $y \in F$, ensemble de départ de g).
Donc $g(y) \in G$, et G est ensemble d'arrivée de $g \circ f$. Or $g \circ f : E \to G$ est surjective. Donc il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x)$. Ainsi, $g(y) = g(f(x))$. Or g est injective, donc on en déduit $y = f(x)$.
$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est surjective}}$.