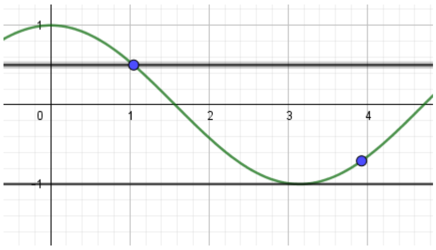
Exercice 1 Déterminer graphiquement les ensembles suivants.

1. $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right]\right)$.
2. $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{4}\right]\right)$.
3. $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$.
4. $\ln([1,\mathbf{e}[\cup[2\mathbf{e},+\infty[)$.
5. $\exp(\mathbb{R}^*)$.
6. $f([-5,1])$ pour $f : x \mapsto x^2$.

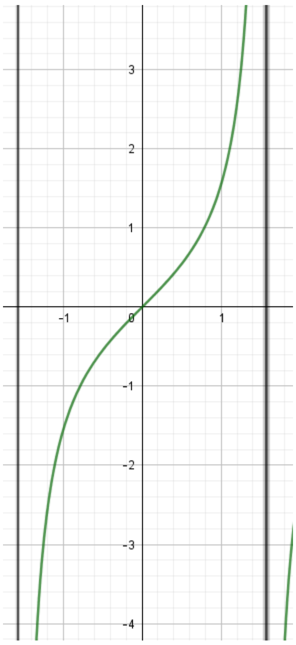
Correction

1. La fonction sinus est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ donc $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]\right)=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
2. Le graphe de la fonction cosinus est le suivant



On en déduit que $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{4}\right]\right)=\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

3. Le graphe de la fonction tangente est le suivant



La fonction tangente est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty$.

On en déduit que $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$.

4. $\ln([1,\mathbf{e}[\cup[2\mathbf{e},+\infty[)=[0,1[\cup[\ln(2e),+\infty[$.
5. $\exp(\mathbb{R}^*)=]0,1[\cup]1,+\infty[$.
6. $f([-5,1])=([0,25])$.

Exercice 2

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
(b) $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1$
(c) $f(x) = |\sin(x)|$

2. Etudier le caractère bijectif de ces fonctions et la bijection réciproque lorsqu'elle existe.

Correction

1. (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ comme polynôme de degré 2. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x - 4$. On en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$.

(b) La fonction f est définie sur $D_f = \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$. Elle est dérivable sur $\left]-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ comme composée puis somme de fonctions dérivables et
$\forall x \in \left]-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$.
On en déduit que f est strictement croissante sur D_f. Donc, $f(D_f) = [-1, +\infty[$.

(c) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
$\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ et $|[-1, 1]| = [0, 1]$. Par composée, $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$.

2. On peut étudier la bijectivité des deux premières fonctions à l'aide du théorème de la bijection.

(a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ donc, par le théorème de la bijection, elle est bijective de $]-\infty, 2]$ dans $[-1, +\infty[$.
De même, elle est bijective de $[2, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$.
Soit $y \in [-1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = y \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 - y = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 4(1 + y) \geq 0$ donc ce polynôme admet deux racines réelles

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{1+y}}{2} = 2 - \sqrt{1+y} \text{ et } x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{1+y}}{2} = 2 + \sqrt{1+y}$$

On remarque que $x_1 \in]-\infty, 2]$ et $x_2 \in [2, +\infty[$.
On en déduit les deux bijections réciproques

$$f_g^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1, +\infty[& \to &]-\infty, 2] \\ y & \mapsto & 2 - \sqrt{1+y} \end{array} \right. \quad \text{et } f_d^{-1} : \left\{ \begin{array}{lll} [-1, +\infty[& \to & [2, +\infty[\\ y & \mapsto & 2 + \sqrt{1+y} \end{array} \right.$$

(b) La fonction f est continue et strictement croissante sur D_f donc, par le théorème de la bijection, elle est bijective de D_f dans $[-1, +\infty[$.
Soit $y \in [-1, +\infty[$.

$$\sqrt{2x+3} - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{(y+1)^2 - 3}{2} \geq \frac{-3}{2}$$

La solution appartient bien à D_f.

On en déduit la bijection réciproque $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{lll} [-1, +\infty[& \to & \left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right[\\ y & \mapsto & \dfrac{(y+1)^2 - 3}{2} \end{array} \right.$.

(c) La fonction f est strictement croissante et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc, par le théorème de la bijection, elle est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0, 1]$.
Soit $y \in [0, 1]$.

$$|\sin(x)| = y \Leftrightarrow \sin(x) = y \Leftrightarrow x = \arcsin(y)$$

De plus, $\arcsin(y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, arcsin est la bijection réciproque de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3 On considère l'application h définie par

$$h : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$$

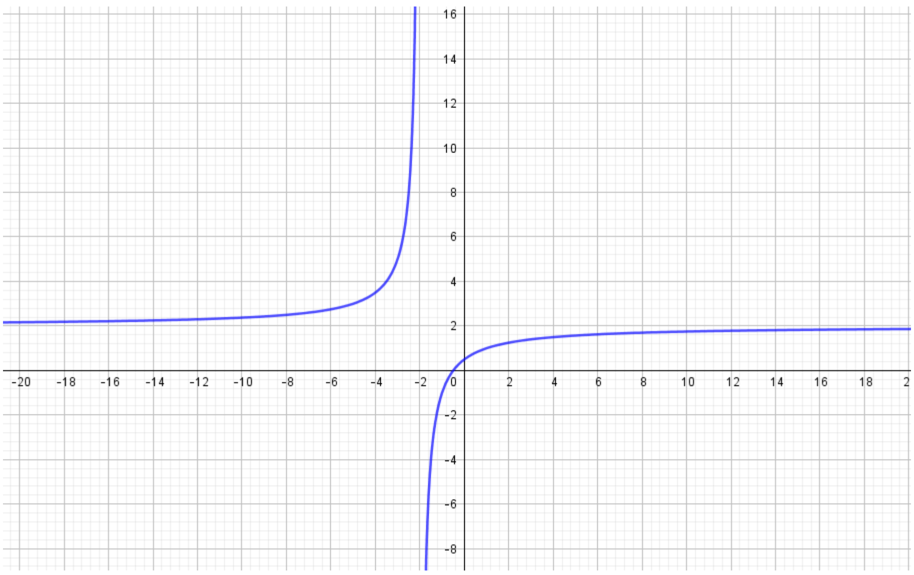
1. Déterminer son ensemble de définition D_h.
2. Déterminer $h(D_h)$.
3. Montrer que h est une bijection de D_h sur $h(D_h)$.
4. Donner sa bijection réciproque.

Correction

1. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. On va étudier les variations de h.
   La fonction h est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

$$\forall x \in D_h,\ f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

   Donc, h est strictement croissante sur $]-\infty, -2[$ et sur $]-2, +\infty[$.
   $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 2$
   On en déduit que $h(D_h) =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.



3. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x+2} = y \quad &\Leftrightarrow \quad 2x + 1 = y(x+2) \\
&\Leftrightarrow \quad x(2-y) = 2y - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{2y-1}{2-y}
\end{aligned}$$

De plus, $\dfrac{2y-1}{2-y} = -2 \Leftrightarrow 2y - 1 = -4 + 2y \Leftrightarrow 1 = 4$.
Donc, $\dfrac{2y-1}{2-y} \in D_h$.
L'équation admet une unique solution dans D_h donc h est une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

4. La bijection réciproque est donnée par la résolution de l'équation précédente.

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}\setminus\{-2\} \\ y \mapsto \dfrac{2y-1}{2-y} \end{cases}$$

Exercice 4 On considère l'application g définie par

$$g : x \mapsto \sqrt{|x-1|} + 4$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_g et $g(D_g)$.
2. L'application g est-elle injective sur D_g ?
3. Déterminer un intervalle sur lequel est l'est.

Correction

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \geq 0$ donc $D_g = \mathbb{R}$.
2. Pour dériver g, on va donner son expression sans la valeur absolue.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} + 4 \text{ si } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} + 4 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

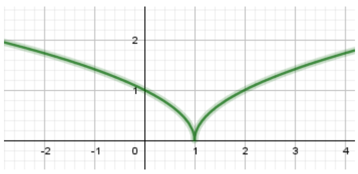
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ g'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

On étudie maintenant les limites aux bord pour en déduire $g(D_g)$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
$g(0) = 4$ donc $g(D_g) = [4, +\infty[$.

Le graphe de la fonction g est le suivant



3. $g(0) = g(2) = 4$ donc 0 admet deux antécédents par g.
On en déduit que g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.
4. g est strictement monotone sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ donc g est injective sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Exercice 5

1. Pour chacune des fonctions f suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.
   (a) $f(n) = 2n + 1$.
   (b) $f(z) = \overline{z}$
   (c) $f(\theta) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$
2. Etudier le caractère bijectif de ces fonctions.

<u>Correction</u>

1. $D_f = \mathbb{N}$ et $f(D_f) = 2\mathbb{N} + 1$.
   Soit $y \in 2\mathbb{N} + 1$.
   $$2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$
   donc l'équation admet une unique solution donc f est bijective de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N} + 1$.
2. $D_f = \mathbb{C}$ et $f(D_z) = \mathbb{C}$.
   Soit $y \in \mathbb{C}$.
   $$f(z) = y \Leftrightarrow \overline{z} = y \Leftrightarrow z = \overline{y}$$
   L'équation admet une unique solution donc f est bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
3. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(D_f) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\} = \mathcal{C}(0, 1) = \mathbb{U}$.
   (a) <u>Injectivité ?</u> Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(\theta) = f(\theta')$.
   donc, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}$ donc $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi$
   Donc f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.
   (b) <u>Surjectivité ?</u> Soit $y = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\phi} \in \mathbb{U}$.
   $$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \phi + 2k\pi$$
   L'équation admet plusieurs solutions donc f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.
   (c) Elle n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

<u>Exercice 6</u>

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, x + y, x + y + z) \end{array} \right.$
   (a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Déterminer les antécédents par f de (a, b, c).
   (b) f est-elle bijective de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$.
2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, y^2, z^2) \end{array} \right.$.
   Déterminer deux ensembles E et F tels que
   (a) f soit injectif de E dans F,
   (b) f soit surjectif de E dans F,
   (c) f soit bijectif de E dans F.

<u>Correction</u>

1. (a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.
$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (a, b, c) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = x \\ b = x + y \\ c = x + y + z \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \\ y = b - a \\ z = c - a - b \end{array} \right. \end{aligned}$$

(b) Chaque point de $\mathbb{C}^3$ a un unique antécédent donc f est bijective de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$.

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$f(x, y, z) = (a, b, c) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ y^2 = b \\ z^2 = c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ y = b \text{ ou } y = -b \\ z = c \text{ ou } z = -c \end{cases}$$

(a) Injectif signifie qu'il n'y a pas plusieurs antécédents par f donc f est injectif de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Tous les points de $\mathbb{R}^3$ ont au moins un antécédent donc f est surjectif de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

(c) f est bijective de E dans F lorsqu'elle est injective et surjective donc f donc f est bijectif de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}^3$..

Exercice 7 On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ x \mapsto \dfrac{1 + \mathbf{i}x}{1 - \mathbf{i}x} \end{cases}$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Cette application est-elle injective sur D_f ? surjective de D_f dans $f(D_f)$?

Correction

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \mathbf{i}x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. $\left|\dfrac{1 + \mathbf{i}x}{1 - \mathbf{i}x}\right| = \dfrac{|1 + \mathbf{i}x|}{|1 - \mathbf{i}x|} = 1$ donc f est bien à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \mathbf{i}x}{1 - \mathbf{i}x} = \frac{1 + \mathbf{i}y}{1 - \mathbf{i}y} \quad &\Leftrightarrow \quad (1 + \mathbf{i}x)(1 - \mathbf{i}y) = (1 - \mathbf{i}x)(1 + \mathbf{i}y) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + xy + \mathbf{i}(x - y) = 1 + xy + \mathbf{i}(-x + y) \\ &\Leftrightarrow \quad x - y = -x + y \\ &\Leftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

   donc la fonction f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.
   Soit $z \in \mathbb{U}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \mathbf{i}x}{1 - \mathbf{i}x} = z \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + \mathbf{i}x = z(1 - \mathbf{i}x) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{i}x(1 + z) = z - 1 \end{aligned}$$

   Donc, $z = -1$ n'a pas d'antécédent par f. Donc, f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

<u>Exercice 8</u> Soient E, F et G trois ensembles.
Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective de E dans G alors f est injective de E dans F.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective de E dans G alors g est surjective de F dans G.

<u>Correction</u> Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Supposons la fonction $g \circ f$ injective de E dans G.
   Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
   $\Rightarrow g[f(x)] = g[f(y)]$
   $\Rightarrow x = y$ (car $g \circ f$ est injective)
   La fonction f est donc injective dans E dans F.
2. Supposons la fonction $g \circ f$ surjective de E dans G. On veut montrer que g est surjective de F dans G.
   Soit $y \in G$.
   Puisque $g \circ f$ est surjective de E dans G, $\exists x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = y$
   que l'on peut réécrire $g[f(x)] = y$. Or, $f(x) \in F$.
   On notant $z = f(x)$, on a bien : $\exists z \in F$ tel que $g(z) = y$.
   La fonction g est surjective de E dans F.

<u>Exercice 9</u> Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.
Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

<u>Correction</u> Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On va montrer l'égalité des ensembles par double inclusion.

- <u>$\subset$:</u> Soit $y \in f(A \cup B)$.
  $\Rightarrow \exists\, x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
  $\Rightarrow (\exists\, x \in A$ tel que $y = f(x))$ ou $(\exists\, x \in B$ tel que $y = f(x))$.
  $\Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$.
  $\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$.
  On en déduit que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
- <u>$\supset$:</u> $A \subset A \cup B$ donc $f(A) \subset f(A \cup B)$.
  De même, $f(B) \subset f(A \cup B)$.
  On en déduit que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

On a montré par double inclusion que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.