Exercice 1 Déterminer le terme général des suites suivantes

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n$.
2. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.
3. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n$.
4. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.
   On pourra faire une conjecture ou utiliser la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n)$.

Correction

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $u_0 = 3$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times (-1)^n$.
2. On reconnait une suite arithmético-géométrique.
   (a) Recherche du point fixe
   $$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1$$
   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - (-1) = u_n + 1$.
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1) = 2w_n$$
   La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_o = u_0 + 1 = 1$.
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2^n$$
   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n - 1$. Donc,
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$$
3. On reconnait une suite arithmético-géométrique.
   (a) Recherche du point fixe
   $$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$
   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - \frac{1}{2}$.
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = 1 - u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - u_n = -w_n$$
   La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $w_o = u_0 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = -\frac{3}{2} \times (-1)^n$$
   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n + \frac{1}{2}$. Donc,
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{3}{2} \times (-1)^n + \frac{1}{2}$$

4. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{2^n}$.
   I Pour $n = 0$, $u_0 = 2^{2^0} = 2^1 = 2$ donc $P(0)$ est vraie.
   H Soit $n \geq 0$ tel que $P(n)$ soit vraie.
   $u_{n+1} = u_n^2 = (2^{2^n})^2 = 2^{2\times 2^n} = 2^{2^{n+1}}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Exercice 2 Déterminer le terme général des suites suivantes.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

Correction

1. L'équation caractéristique associée à cette suite est $x^2 = 4x - 4$ de discriminant $\Delta = 16 - 16 = 0$. Cette équation admet donc une racine double $x = \dfrac{4}{2} = 2$. On en déduit la forme du terme général de la suite u
$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + nB) \times 2^n$$
Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.
$$\begin{cases} u_0 = A = 1 \\ u_1 = (A + B) \times 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$
L'unique suite définie dans l'énoncé a un terme général de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1 - n)2^n$.
2. L'équation caractéristique associée à cette suite est $x^2 + 2x - 3 = 0$ de discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$. Cette équation admet deux racines $x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = -3$. On en déduit la forme du terme général de la suite u
$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A + B(-3)^n$$
Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.
$$\begin{cases} u_0 = A + B = 1 \\ u_1 = A - 3B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{1}{4} \\ A = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$
L'unique suite définie dans l'énoncé a un terme général de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{5 - (-3)^n}{4}$.
3. L'équation caractéristique associée à cette suite est $x^2 - 2x + 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Cette équation admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{2 + 2\mathbf{i}}{2} = 1 + \mathbf{i}$ et $z_2 = \dfrac{2 - 2\mathbf{i}}{2} = 1 - \mathbf{i}$.
On détermine l'écriture trigonométrique d'une des racines : $1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}$.
On en déduit la forme du terme général de la suite u
$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\sqrt{2})^n \left[A \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$
Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ \sqrt{2}\left[A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + B \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 1 + B = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\sqrt{2})^n \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_0 = 1,\ w_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 3w_n + 2u_n$$

1. Calculer u_1, w_1, u_2 et w_2.
2. Montrer que la suite $(u_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1. $u_1 = 3u_0 + 2w_0 = 7$, $v_1 = 3w_0 + 2u_0 = 8$, $u_2 = 3u_1 + 2w_1 = 37$ et $w_2 = 3w_1 + 2u_1 = 38$.
2. On dit qu'une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n$. La valeur de la constante est ensuite donnée par la valeur du premier terme.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - w_{n+1} = 3u_n + 2w_n - (3w_n + 2u_n) = u_n - w_n$$

La suite $(u_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et vaut $u_0 - w_0 = -1$. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + 1$$

3. On doit montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2w_n = 3u_n + 2(u_n + 1) = 5u_n + 2$$

La suite u est bien une suite arithmético-géométrique.

4. On va appliquer la méthode qui permet d'obtenir l'expression du terme général à partir de la formule de récurrence.
   (a) Recherche du point fixe

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad x = 5x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = u_n - \left(\frac{-1}{2}\right) = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 5u_n + 2 + \frac{1}{2} = 5u_n + \frac{5}{2} = 5\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 5t_n$$

   La suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $t_o = u_0 + \frac{1}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \frac{3}{2} \times 5^n$$

   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = t_n - \left(\frac{1}{2}\right)$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}$$

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}$$

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq 0$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $u_n \geq 0$.
3. On définit une suite auxiliaire $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   Montrer que cette suite est géométrique.
4. En déduire le terme de général de la suite t en fonction de n.
5. En déduire celui de la suite u.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $x + 2 > 0$ et $2x + 1 \geq 0$. Par quotient, $f(x) \geq 0$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: "u_n existe et $u_n \geq 0$".
   I : $u_0 = 2$ donc $P(0)$ est vraie.
   H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
   $u_n \geq 0$ donc $u_n \neq -2$. Donc, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
   Or, $u_n \geq 0$ donc, pas la question 1, $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$.
   Donc, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1}{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} + 1} = \frac{\dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}}{\dfrac{3u_n + 3}{u_n + 2}} = \frac{u_n - 1}{3(u_n + 1)} = \frac{1}{3} t_n$$
   La suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
4. La suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $t_0 = \dfrac{1}{3}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow t_n(u_n + 1) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{-1 - t_n}{t_n - 1} \text{ car } t_n \neq 1$$
   donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{t_n + 1}{1 - t_n} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{3^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{3^{n+1}}}$.

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à termes strictement positifs.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n)$. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire ensuite l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?
6. Écrire une fonction python `suite(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n. On rappelle que la racine carrée est obtenue par la commande `sqrt`.
7. Écrire une fonction python `somme(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On pourra utiliser la fonction `suite` de la question précédente, ou pas (2 solutions possibles).

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :
$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n \text{ existe et } u_n > 0\text{"}$$
   - $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = 1$ (existe et est >0).
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

   Donc $u_n > 0$. Donc $\dfrac{2}{u_n}$ est bien défini et $\dfrac{2}{u_n} > 0$, donc $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}}$ est bien défini et $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} > 0$. Or $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} = u_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : ainsi, d'après le principe de récurrence, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à termes strictement positifs.
2. On a montré à la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, donc $\ln(u_n)$ existe.
$\boxed{\text{Donc la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie}}$.
3. On déduit de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln(u_n)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}v_n$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   - Déterminons $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ell$. On trouve $\ell = \dfrac{1}{3}\ln(2)$.
   - Puis :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} v_{n+1} &= \frac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}v_n & (1) \\ \dfrac{1}{3}\ln(2) &= \frac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}\ln(2) & (2) \end{cases}$$
   Donc $((1)-(2))$ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - \dfrac{1}{3}\ln(2) = -\dfrac{1}{2}(v_n - \dfrac{1}{3}\ln(2))$.
   - Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_n - \dfrac{1}{3}\ln(2)$. La relation précédente donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = -\dfrac{1}{2}w_n$, donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n w_0$. Avec $w_0 = v_0 - \dfrac{1}{3}\ln(2)$ et $v_0 = \ln(u_0) = 0$ car $u_0 = 1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = -\dfrac{1}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
   - On en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = w_n + \dfrac{1}{3}\ln(2) = \dfrac{1}{3}\ln(2) - \dfrac{1}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{3}\ln(2)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbf{e}^{v_n} = \exp\left[\dfrac{1}{3}\ln(2)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \exp\left[\dfrac{1}{3}\ln(2)\right]$.

Exercice 6 **Sujet DS**
On considère une suite réelle (u_n) qui vérifie $u_0 = u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n$.

1. Écrire une fonction en Python qui prend en entrée les valeurs de u_0 (qu'on pourra noter `u0`) et de n , et qui renvoie la valeur de u_n.
2. (a) Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   (b) Déterminer la valeur de $\sin(\alpha)$.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, de u_0 et de α.
4. Exprimer la somme des n premiers termes de la suite u en fonction de n, de u_0 et de α.

Correction

1. def suite(u0,n) : u=u0 v=u0 for i in range(2,n+1) : u,v=v,2*v-5*u return(v)
2. (a) La fonction cos est strictement décroissante et continue sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc, par le théorème de la bijection, cos est une bijection de $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
   Or, $\frac{1}{\sqrt{5}} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $\frac{1}{\sqrt{5}}$ admet un unique antécédent dans $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ par cos. On le note α.
   (b) on a $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, donc $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$, donc $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ou $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Or, $\sin(\alpha) > 0$ donc on peut conclure que $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
3. On reconnaît l'expression définissant une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $x^2 - 2x + 5 = 0$ a deux solutions complexes conjuguées $z_1 = 1 - 2\mathbf{i}$ et $z_2 = 1 + 2\mathbf{i}$
   On a $|z_2| = \sqrt{5}$ et $z_1 = \sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}} + \mathbf{i}\frac{2}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha}$.
   Donc, $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{5}^n(A\cos(n\alpha) + B\sin(n\alpha))$.
   Déterminons A et B :
$$\begin{cases} u_0 = A \\ \underbrace{u_1}_{=u_0} = \sqrt{5}(A\underbrace{\cos\alpha}_{\frac{1}{\sqrt{5}}} + B\underbrace{\sin\alpha}_{\frac{2}{\sqrt{5}}}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = u_0 \\ B = 0 \end{cases}$$
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\sqrt{5}^n\cos(n\alpha)$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{5}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha}\right)^k\right) = u_0\mathrm{Re}\left(\frac{1 - \left(\sqrt{5}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha}\right)^n}{1 - \sqrt{5}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha}}\right)$.
   Or, $\displaystyle\frac{1 - \left(\sqrt{5}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha}\right)^n}{1 - \sqrt{5}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha}} = \frac{(1 - \sqrt{5}^n\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\alpha})(1 - \sqrt{5}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\alpha})}{(1 - \sqrt{5}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha})(1 - \sqrt{5}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\alpha})} = \frac{(1 - \sqrt{5}^n\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\alpha})(1 - \sqrt{5}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\alpha})}{(-2\mathbf{i})(2\mathbf{i})}$.
   $\displaystyle = \frac{1 - \sqrt{5}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\alpha} - \sqrt{5}^n\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\alpha} + \sqrt{5}^{n+1}\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n-1)\alpha}}{4}$
   Donc, $\displaystyle\mathrm{Re}\left(\frac{1 - \left(\sqrt{5}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha}\right)^n}{1 - \sqrt{5}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\alpha}}\right) = \frac{1 - 1 - \sqrt{5}^n\cos(n\alpha) + \sqrt{5}^{n+1}\cos((n-1)\alpha)}{4}$
   $\displaystyle = \frac{-\sqrt{5}^n\cos(n\alpha) + \sqrt{5}^{n+1}\cos((n-1)\alpha)}{4}$.
   Finalement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0.\frac{-\sqrt{5}^n\cos(n\alpha) + \sqrt{5}^{n+1}\cos((n-1)\alpha)}{4}$.
   Or, par une formule de trigonométrie,
   $\sqrt{5}^{n+1}\cos((n-1)\alpha) = \sqrt{5}^{n+1}\cos(n\alpha).\frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}^{n+1}\sin(n\alpha).\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}^n\cos(n\alpha) + \sqrt{5}^n 2\sin(n\alpha)$.
   Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0.\frac{\sqrt{5}^n 2\sin(n\alpha)}{4} = \frac{u_0}{2}(\sqrt{5})^n\sin(n\alpha)$.

Exercice 7 Sans se soucier de la bonne définition de la suite, étudier la monotonie des suites proposées.

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathbf{e}^{u_n} - 1$.
   On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \mathbf{e}^x - 1 - x$ en calculant la dérivée seconde de g.

Correction Pour étudier la monotonie d'une suite u, on peut s'intéresser au signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On fait une récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$: "$u_{n+1} \geq u_n$".
   - La propriété est vraie au rang 0.
   - Supposons qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que $P(n)$ soit vraie.

   $$u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{1+u_{n+1}} - \sqrt{1+u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{1+u_{n+1}} + \sqrt{1+u_n}} \underset{\text{HDR}}{\geq} 0$$

   Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

   La suite u est donc croissante.

   Ajout. On a montré de plus qu'elle était minorée par 0 donc, pas le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons l sa limite. On a donc

   $$\sqrt{1+l} = l \Leftrightarrow 1 + l = l^2 \Leftrightarrow l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

   Or, on doit avoir $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq 0$ donc $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ donc on s'intéresse à la fonction $g(x) = \mathbf{e}^x - 1 - x$ définie sur $\mathbb{R}$.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \mathbf{e}^x - 1$.
   La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = \mathbf{e}^x$.
   On va pouvoir en déduire du signe de g'' le signe de g'.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$		$+$	$+\infty$
$g'(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Puis on en déduit le signe de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite u est croissante.

Exercice 8 Etudier la nature des suites proposées.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$
3. * $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\lfloor na \rfloor}{n}$ pour $a \in \mathbb{R}$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\lfloor na \rfloor}{a}$ pour $a \in \mathbb{R}^*$.

Correction

1. $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} = \frac{3^n(\frac{2^n}{3^n} - 1)}{3^n(\frac{2^n}{3^n} + 1)} = \frac{\frac{2^n}{3^n} - 1}{\frac{2^n}{3^n} + 1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$
   La suite $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par somme et quotient de suites convergentes, la suite u est convergente.
   Par opération sur les limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$.
2. $$\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leq \cos(n) \leq 1$$
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{-1}{n+1} \leq \cos(n) \leq \frac{1}{n+1}$$
   Les suites $\left(\dfrac{-1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes et de même limite 0.
   Par le théorème d'encadrement, la suite u est convergente et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n &= \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times ... \times n}{n \times n \times ... \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times ... \times \frac{n-1}{n} \times 1 \\ &\leq \frac{1}{n} \times 1 \times ... \times 1 \times 1 \\ \text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$
   La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite 0.
   Par le théorème d'encadrement, la suite u est convergente et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. On va minorer la suite par une suite qui diverge vers $+\infty$.
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
   car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc,
   $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ u_n &\geq \sqrt{n} \end{aligned}$$
   La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Par le théorème de minoration, la suite u diverge vers $+\infty$.
5. $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ na - 1 &< \lfloor na \rfloor \leq na \\ \frac{na-1}{n} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \leq \frac{na}{n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R},\ a - \frac{1}{n} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \leq a \end{aligned}$$

La suite $\left(a - \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. Par le théorème d'encadrement, la suite u converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

6.

$$\begin{array}{rrcl} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{R}, & na-1 & < & \lfloor na \rfloor \leq na \\ \text{Si } a>0, & \dfrac{na-1}{a} & < & \dfrac{\lfloor na \rfloor}{a} \leq \dfrac{na}{a} \\ \text{Si } a<0, & \dfrac{na-1}{a} & > & \dfrac{\lfloor na \rfloor}{a} \geq \dfrac{na}{a} \end{array}$$

Les suites $\left(n - \dfrac{1}{a}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.
Par le théorème de minoration, quelque soit le signe de a, la suite u diverge vers $+\infty$.

Exercice 9 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+1}$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que l'intervalle $[1,2]$ est stable par f, c'est-à-dire que $\forall x \in [1,2],\ f(x) \in [1,2]$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Correction

1. $u_1 = \dfrac{3u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{5}{3}$. $u_2 = \dfrac{3u_1 - 1}{u_1 + 1} = \dfrac{4}{\frac{8}{3}} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$. $u_3 = \dfrac{3u_2 - 1}{u_2 + 1} = \dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{7}{5}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{3(x+1) - (3x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$.
   Donc, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. $f(1) = 1$ et $f(2) = \dfrac{5}{3}$. Or, la fonction f est croissante sur $[1,2]$ donc $\forall x \in [1,2],\ 1 \leq f(x) \leq \dfrac{5}{3}$.
   Donc, $[1,2]$ est stable par f.
4. On raisonne par récurrence. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : u_n$ existe et $1 \leq u_n \leq 2$.
   - **I** u_0 existe et $u_0 = 2$ donc $P(0)$ est vrai.
   - **H** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai.
     $u_n \neq -1$ donc $f(u_n)$ existe. Donc, u_{n+1} existe.
     De plus, par stabilité, $f(u_n) \in [1,2]$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc, $P(n+1)$ est vrai.
   - **C** Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : u_n$ existe et $1 \leq u_n \leq 2$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 1} = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 1} < 0$.
   Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. La suite est minorée et décroissante. Par le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons ℓ sa limite.
   La fonction f est continue sur $[1,2]$ donc, par le théorème du point fixe, $f(\ell) = \ell$.
   Or, $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 3\ell - 1 = \ell(\ell + 1) \Leftrightarrow \ell = 1$.
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 10

1. (a) Montrer que la fonction sin est une bijection sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans un intervalle à déterminer.
   (b) En déduire que, pour tout entier positif n non nul, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On la note x_n.
2. **Etude de la suite x**
   (a) Montrer que la suite x est décroissante.
   (b) En déduire qu'elle converge.

Correction

1. (a) La fonction sin est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $[0, 1]$.
   Par le théorème de la bijection, sin est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0, 1]$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{n} \in [0, 1]$. Donc, pas définition d'une bijection, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent par sin dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, l'équation admet une unique solution.
2. (a) On raisonne par l'absurde.Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n < x_{n+1}$.
   Par stricte croissante de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient que $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n}$. C'est absurde.
   Donc, $x_n \geq x_{n+1}$. La suite x est décroissante.
   (b) La suite x est décroissante et minorée par 0. Par le théorème de la limite monotone, elle converge.

Exercice 11 [*] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.
   (b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On la note x_n.
2. Déterminer x_1 et x_2.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq \frac{1}{2}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$.
   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$.
   (a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puisque c'est une fonction polynomiale et
   $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} > 0$.
   Donc, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est également continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Par le théorème de la bijection, f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans
   $[f_n(0), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[$.
   (b) $0 \in [-1, +\infty[$ donc 0 admet un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}_+$. On a donc $f_n(x_n) = 0$.

2. $f_1 : x \mapsto x - 1$ donc $x_1 = 1$.
   $f_2 : x \mapsto x^2 + x - 1$ donc $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k - 1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - 1 = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   Donc, $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq f_n(x_n)$. Par monotonie de la fonction f_n, on obtient $\dfrac{1}{2} \leq x_n$.
4. On a $f_n(x_n) = 0$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.
   De plus, $f_n(x_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{n+1}^k - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} x_{n+1}^k - x_{n+1}^{n+1} - 1 = f_{n+1}(x_{n+1}) - x_{n+1}^{n+1} = -x_{n+1}^{n+1} < 0$.
   Donc, $f_n\left(x_{n+1}\right) \leq f_n(x_n)$. Par monotonie de la fonction f_n, on obtient $x_{n+1} \leq x_n$.
   Donc, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. La suite est décroissante et minorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge.