Exercice 1 Déterminer le terme général des suites suivantes

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n$.
2. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.
3. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n$.
4. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.
   On pourra faire une conjecture ou utiliser la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n)$.

Exercice 2 Déterminer le terme général des suites suivantes.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_0 = 1,\ w_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 3w_n + 2u_n$$

1. Calculer u_1, w_1, u_2 et w_2.
2. Montrer que la suite $(u_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq 0$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $u_n \geq 0$.
3. On définit une suite auxiliaire $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   Montrer que cette suite est géométrique.
4. En déduire le terme de général de la suite t en fonction de n.
5. En déduire celui de la suite u.

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à termes strictement positifs.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n)$. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire ensuite l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?
6. Écrire une fonction python `suite(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n. On rappelle que la racine carrée est obtenue par la commande `sqrt`.
7. Écrire une fonction python `somme(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$. On pourra utiliser la fonction `suite` de la question précédente, ou pas (2 solutions possibles).

Exercice 6 Sujet DS
On considère une suite réelle (u_n) qui vérifie $u_0 = u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n$.

1. Écrire une fonction en Python qui prend en entrée les valeurs de u_0 (qu'on pourra noter `u0`) et de n , et qui renvoie la valeur de u_n.
2. (a) Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

   (b) Déterminer la valeur de $\sin(\alpha)$.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, de u_0 et de α.
4. Exprimer la somme des n premiers termes de la suite u en fonction de n, de u_0 et de α.

Exercice 7 Sans se soucier de la bonne définition de la suite, étudier la monotonie des suites proposées.

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathbf{e}^{u_n} - 1$.
   On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto \mathbf{e}^x - 1 - x$ en calculant la dérivée seconde de g.

Exercice 8 Etudier la nature des suites proposées.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$
3. * $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\lfloor na \rfloor}{n}$ pour $a \in \mathbb{R}$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\lfloor na \rfloor}{a}$ pour $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 9 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{x+1}$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f, c'est-à-dire que $\forall x \in [1, 2],\ f(x) \in [1, 2]$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 10

1. (a) Montrer que la fonction sin est une bijection sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans un intervalle à déterminer.
   (b) En déduire que, pour tout entier positif n non nul, l'équation $\sin(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On la note x_n.
2. **Etude de la suite x**
   (a) Montrer que la suite x est décroissante.
   (b) En déduire qu'elle converge.

Exercice 11 [*] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.
   (b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On la note x_n.
2. Déterminer x_1 et x_2.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq \dfrac{1}{2}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$.
   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.