

Chapitre 11 : Dénombrement

Table des matières

1	Dénombrement.	2
1.1	Définitions.	2
1.2	Listes avec répétition.	2
1.3	Listes sans répétition.	2
1.4	Permutations.	3
1.5	Combinaisons.	3
1.6	Nombre de sous-parties d'un ensemble.	3
2	Cardinal d'un ensemble.	4
2.1	Egalité des cardinaux.	4
2.2	Cardinal d'une partie de E	4
2.3	Cardinal d'une intersection ou d'une union.	4
2.4	Cardinal d'un produit cartésien.	5
3	A retenir.	5
3.1	Additionner ou multiplier des cardinaux ?	5
3.2	Bien cerner la situation.	5
4	Vision combinatoire des coefficients binomiaux (HP).	6
4.1	Symétrie des coefficients.	6
4.2	Triangle de Pascal.	6

1 Dénombrément.

1.1 Définitions.

Définition 1.

Soit E un ensemble.

On dit que E est un ensemble fini lorsqu'il contient un nombre fini d'éléments.

On appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E .

On note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.

Exemple 2.

1. \emptyset est un ensemble fini de cardinal nul.
2. $\llbracket 1, 12 \rrbracket$ est un ensemble fini de cardinal 12.

1.2 Listes avec répétition.

Définition 3.

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Pour $p \in \mathbb{N}$, on appelle p -liste ou p -uplet de E un élément de E^p .

Exemple 4. Pour $E = \{0, 2, 3, 12\}$, $(3, 2, 3)$ est un 3-uplet de E .

Remarque 5. On rencontre des p -uplet lors de tirages **avec remise**.

Théorème 6.

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Pour $p \in \mathbb{N}$, il y a exactement n^p p -uplets de E .

Exemple 7. Combien de nombres à 8 chiffres peut-on écrire ne contenant que des 1 et des 2?

1.3 Listes sans répétition.

Définition 8.

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Pour $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on appelle p -liste sans répétition une p -liste dont les éléments sont **distincts**.

Exemple 9. $(1, 2, 5)$ est une 3-liste sans répétition de $\llbracket 1; 12 \rrbracket$.

Remarque 10. On rencontre des p -listes sans répétition lors de tirages **sans remise**.

Théorème 11.

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Pour $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il y a $\frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1) \dots (n-p+1)$ p -listes sans répétition de E .

Exemple 12. On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire 3 cartes successivement et sans remise. Combien y a-t-il de tirages possibles ? (L'ordre compte).

1.4 Permutations.

Définition 13.

Soit E un ensemble fini de cardinal n .
On appelle permutation de E un n -uplet de E contenant exactement une seule fois chaque élément de E .

Exemple 14. $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10, 12)$ est une permutation de $\llbracket 1; 12 \rrbracket$.

Remarque 15. On rencontre des permutations lorsqu'on veut **trier les éléments** d'un ensemble.

Théorème 16.

Soit E un ensemble de cardinal n .
Il y a exactement $n!$ permutations de E .

Exemple 17. Lors d'une compétition entre 8 sportives, combien y a-t-il de classements possibles ?

Exemple 18. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ?

1.5 Combinaisons.

Définition 19.

Soit E un ensemble fini de cardinal n .
Pour $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on appelle p -combinaison de E toute partie de E à p éléments.

Exemple 20. On rencontre des p -combinaisons lors de **tirages simultanés**.

Théorème 21.

Soit E un ensemble fini de cardinal n .
Pour $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il y a exactement $\binom{n}{p}$ p -combinaisons de E .

Exemple 22. De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

1.6 Nombre de sous-parties d'un ensemble.

Théorème 23.

Soit E un ensemble fini de cardinal n .
L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Exemple 24. Si E est l'ensemble des nombres pairs entre 1 et 12, quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

2 Cardinal d'un ensemble.

2.1 Égalité des cardinaux.

Théorème 25.

Soient E et F deux ensembles finis.
 E et F ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre les deux ensembles.

Exemple 26. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. $\llbracket m, n \rrbracket$ est un ensemble fini de cardinal $n - m + 1$.

2.2 Cardinal d'une partie de E .

Théorème 27.

Soit E un ensemble fini. Soit A une partie de E ($A \in \mathcal{P}(E)$).

1. A est un ensemble fini et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.
2. $\text{card}(A) = \text{card}(E) \Leftrightarrow A = E$.

Remarque 28. Le calcul du cardinal peut donc remplacer la démonstration de la double inclusion.

2.3 Cardinal d'une intersection ou d'une union.

Théorème 29.

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, deux parties de E .
 Alors, $A \cap B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cap B) \leq \min(\text{card}(A), \text{card}(B)).$$

Théorème 30.

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, deux parties **disjointes** de E .
 Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Théorème 31.

Soit E un ensemble fini. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
 Alors, \bar{A} est un ensemble fini et

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A).$$

Théorème 32 (Formule du Crible).

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Exemple 33. Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.
Que pouvez-vous dire de $\text{card}(A \cup B \cup C)$?

2.4 Cardinal d'un produit cartésien.**Théorème 34.**

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
Alors, $A \times B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B).$$

Théorème 35.

Soit E un ensemble fini. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Alors, E^p est un ensemble fini et

$$\text{card}(E^p) = (\text{card}(E))^p.$$

3 A retenir.**3.1 Additionner ou multiplier des cardinaux ?**

Pour déterminer un cardinal,

- Si l'ensemble que vous étudiez est une union disjointe de plusieurs ensembles, Alors, **vous additionnez** les cardinaux de chaque ensemble.
- Si l'ensemble que vous étudiez est un produit cartésien de plusieurs ensembles, Alors, **vous multipliez** les cardinaux de chaque ensemble.

3.2 Bien cerner la situation.

	Avec répétition	Sans répétition
Avec ordre	Listes avec répétition Pour $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$ n^p	Listes sans répétition Pour $n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ $\frac{n!}{(n-p)!}$
Sans ordre		Combinaisons Pour $n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ $\binom{n}{p}$

4 Vision combinatoire des coefficients binomiaux (HP).

4.1 Symétrie des coefficients.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble à n éléments.

Soit $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Choisir une partie de E à p éléments, c'est équivalent à choisir les $n - p$ éléments qui ne sont pas dans cette partie.

$$\text{Donc, } \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

4.2 Triangle de Pascal.

Soit E un ensemble à $n + 1$ éléments. Soit $x \in E$. Soit $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Parmi les $\binom{n+1}{p}$ parties de E à p éléments, il y a

- celles contenant x , il y en a $\binom{n}{p-1}$
- celles ne contenant pas x , il y en a $\binom{n}{p}$.

$$\text{D'où } \binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}.$$