BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 3

— 16 novembre 2024—

Exercice 1.

1.
```python
def somme(n):
    s = 0
    for k in range(2,n+1):
        s = s + 1/k**2
    return s
```

2. Pour obtenir S_{100}, on doit taper `somme(100)`.
3. La fonction suivante renvoie le plus petit entier n tel que $S_n \geqslant 0.6$:

```python
def seuil():
    n = 2
    s = 1/n**2
    while s <0.6:
        n = n +1
        s = s + 1/n**2
    return n
```

4. $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $0 < k(k-1) \leqslant k \times k$. Donc en appliquant la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient : $\boxed{\forall k \in [\![2, n]\!],\ \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}}$.

5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1} \iff \frac{1}{k(k-1)} = \frac{(a+b)k-a}{k(k-1)}$$
$$\iff 1 = (a+b)k - a (\text{on a multiplié par } k(k-1) \neq 0)$$
Pour que cette dernière égalité soit vraie pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, il suffit que $\begin{cases} a+b=0 \\ -a=1 \end{cases}$.

Ce système a pour solution $\boxed{a=-1,\ b=1}$. Ainsi, $\boxed{\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ \frac{1}{k(k-1)} = \frac{-1}{k} + \frac{1}{k-1}}$.

6. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ fixé quelconque. D'après la question précédente, $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

On somme pour k entre 2 et n, ce qui donne : $S_n \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$.

La somme de droite est une somme télescopique. Elle vaut $1 - \frac{1}{n}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ S_n \leqslant 1 - \frac{1}{n}}$.

Exercice 2.

1. f est un quotient de deux polynômes de degré 1. La seule contrainte est que le dénominateur ne s'annule pas.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 3x - 2 \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}}$.

2. La fonction f est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables sur D_f avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\},\ f'(x) = \frac{2(3x-2)-3(2x+1)}{(3x-2)^2} = \boxed{\frac{-7}{(3x-2)^2}}.$$

3. La fonction f' est strictement négative sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

   Soit $x \neq \frac{2}{3}$. $f(x) = \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(3-\frac{2}{x})} = \frac{2-\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}}$. Par somme puis quotient de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{3}$.

   $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^+} (2x+1) = \frac{7}{3}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^+} (3x-2) = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^+} f(x) = +\infty$.

   $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^-} (2x+1) = \frac{7}{3}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^-} (3x-2) = 0^-$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}^-} f(x) = -\infty$.

   On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$\frac{2}{3}$ ↘	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	↘ $\frac{2}{3}$

4. Ainsi, $f(D_f) = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[= \boxed{\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}}$.

5. Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{2x+1}{3x-2} \\ &\Leftrightarrow y(3x-2) = 2x+1 \\ &\Leftrightarrow x(3y-2) = 2y+1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{3y-2} \text{ car } y \neq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

   La fonction f est donc $\boxed{\text{une bijection de } \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\} \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\} \text{ et } f^{-1} = f}$.

6. $f \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{D_f}$ donc $\boxed{f \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\} & \to & \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.}$.

Problème

Préambule.

1. La fraction est bien définie si et seulement si $1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ est différent de 0, *i.e.* $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \neq 1$. On en déduit donc que la fraction est bien définie à condition que $\boxed{\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Avec la méthode de factorisation par l'angle moitié, on trouve alors

$$\begin{aligned}
\frac{1+\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} &= \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}+\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\right)}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\right)} \\
&= \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{avec les formules d'Euler} \\
&= i\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

On remarque que la cotangente est ici bien définie car $\dfrac{\theta}{2}$ appartient à $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

En conclusion, on a $\boxed{\dfrac{1+\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} = i\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right).}$

Partie I.

1. L'équation $5\mathbf{X}^2 - 10\mathbf{X} + 1 = 0$ est une équation du second degré. Son discriminant vaut $\Delta = 80 > 0$ donc cette équation possède deux racines réelles distinctes. L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}, \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right\}.}$$

2. Comme on le constate dans la question précédente, les racines sont réelles.
De plus, $\boxed{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5} > 0}$ car c'est la somme de nombres réels strictement positifs.
Puis : $2\sqrt{5}$ et 5 sont des nombres réels positif, donc pour les comparer, il suffit de comparer leurs carrés. $(2\sqrt{5})^2 = 20$ et $5^2 = 25$ donc $2\sqrt{5} < 5$. Ainsi, $\boxed{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5} > 0}$.

3. La formule du binôme donne :

$$\boxed{\begin{array}{l}(z+\mathbf{i})^5 = z^5 + 5\mathbf{i}z^4 - 10z^3 - 10\mathbf{i}z^2 + 5z + \mathbf{i}, \\ (z-\mathbf{i})^5 = z^5 - 5\mathbf{i}z^4 - 10z^3 + 10\mathbf{i}z^2 + 5z - \mathbf{i}.\end{array}}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
(z+\mathbf{i})^5 = (z-\mathbf{i})^5 &\iff z^5 + 5\mathbf{i}z^4 - 10z^3 - 10\mathbf{i}z^2 + 5z + \mathbf{i} = z^5 - 5\mathbf{i}z^4 - 10z^3 + 10\mathbf{i}z^2 + 5z - \mathbf{i}, \\
&\iff 5\mathbf{i}z^4 - 10\mathbf{i}z^2 + \mathbf{i} = 0, \\
&\iff 5z^4 - 10z^2 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } z \text{ est solution de } (E) \text{ si, et seulement si, } 5z^4 - 10z^2 + 1 = 0.}$
Cette dernière équation est une <u>équation de degré 4 à coefficients réels</u>.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé quelconque. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (E) &\iff 5z^4 - 10z^2 + 1 = 0, \\
&\iff 5(z^2)^2 - 10(z^2) + 1 = 0, \\
&\iff z^2 \text{ est solution de } (E'), \\
&\iff \boxed{z^2 = \frac{5-2\sqrt{5}}{5} \text{ ou } z^2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.\text{(d'après 1)}
\end{aligned}$$

6. Nous savons que $\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}$ et $\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$ sont strictement positifs. Donc l'équation $z^2 = \dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}$ possède deux racines réelles qui sont $z = \sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ et $z = -\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$.
   Il en est de même pour l'équation $z^2 = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$, les racines sont $z = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ et $z = -\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$.
   Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :
$$\boxed{\left\{-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}, -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}, \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right\}.}.$$

7. Nous avons deux solutions strictement positives, $\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ et $\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, et leurs opposés.
   Puisque $2\sqrt{5} > 0$, on a : $\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}}$. On en déduit :
$$\boxed{-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} < -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} < \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.}.$$

Partie II.

1. On remarque que $(\mathbf{i}+\mathbf{i})^5 = (2\mathbf{i})^5 \neq 0$ et $(\mathbf{i}-\mathbf{i})^5 = 0^5 = 0$. Ainsi, $\boxed{\mathbf{i} \text{ n'est pas solution de } (E).}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque $\mathbf{i}$ n'est pas racine de (E), on peut supposer $z \neq \mathbf{i}$. Ainsi, $\boxed{(z-\mathbf{i})^5 \neq 0}$.
   Donc en divisant l'équation (E) par $(z-\mathbf{i})^5$, on obtient une équation équivalente à (E).
$$\forall z \in \mathbb{C},\ (z+\mathbf{i})^5 = (z-\mathbf{i})^5 \iff \left(\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right)^5 = 1.$$

3. (a) Soit $Z \in \mathbb{C}$ fixé quelconque. On suppose que Z est solution de (E''). Donc $Z^5 = 1$. Ainsi, $|Z^5| = 1$. Or $|Z^5| = |Z|^5$. On en déduit $|Z|^5 = 1$, $\boxed{\text{d'où } |Z| = 1}$ car $|Z| \in \mathbb{R}$.
   (b) On cherche les solutions de (E'') sous la forme $Z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$.
$$\begin{aligned} Z^5 = 1 &\iff (\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^5 = 1 \\ &\iff \mathbf{e}^{\mathbf{i}5\theta} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}0} \text{ (formule de Moivre)} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 5\theta = 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{2k\pi}{5} \end{aligned}$$
   Or nous avons imposé $\theta \in [0, 2\pi[$ donc on doit avoir : $0 \leqslant \dfrac{2k\pi}{5} < 2\pi$, c'est à dire $0 \leqslant k < 5$. Puisque k est entier, cela est équivalent à $k \in [\![0, 4]\!]$. Donc
$$Z^5 = 1 \iff \exists k \in [\![0, 4]\!] \text{ tel que } Z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{5}}$$
   Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E'') \text{ est } \left\{\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}},\ k \in [\![0, 4]\!]\right\}}$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question 2,

$$\begin{aligned}(z+\mathbf{i})^5 = (z-\mathbf{i})^5 &\iff \left(\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right)^5 = 1,\\ &\iff \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} \text{ est solution de } (E'')\\ &\iff \exists k \in [\![0,4]\!] \text{ tel que } \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{z \text{ est solution de } (E) \iff \text{il existe } k \in [\![0,4]\!] \text{ tel que } \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}.}$$

5. Posons $k=0$. L'équation précédente devient $\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = 1$. Or,

$$\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = 1 \Leftrightarrow z+\mathbf{i} = z-\mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{i} = -\mathbf{i}$$

La dernière équation n'est jamais vérifiée.
Ainsi, $\boxed{\text{si } k=0, \text{ l'équation n'a pas de solution}}$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé.

$$\begin{aligned}(z+\mathbf{i})^5 = (z-\mathbf{i})^5 &\iff \exists k \in [\![0,4]\!] \text{ tel que } \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}} (\text{ d'après 4})\\ &\iff \exists k \in [\![1,4]\!] \text{ tel que } \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}} (\text{ d'après 5})\\ &\iff \exists k \in [\![1,4]\!] \text{ tel que } z+\mathbf{i} = (z-\mathbf{i})\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}\\ &\iff \exists k \in [\![1,4]\!] \text{ tel que } (1-e^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}})z = -\mathbf{i}(1+\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}})\\ &\iff \exists k \in [\![1,4]\!] \text{ tel que } z = -\mathbf{i}\frac{(1+\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}})}{(1-\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}})} \text{ car } \forall k \in [\![1,4]\!],\ 1-\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}} \neq 0.\\ &\iff \exists k \in [\![1,4]\!] \text{ tel que } z = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{5}\right) (\text{d'après la partie 0, question 2}).\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{\left\{\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{5}\right),\ k \in [\![1,4]\!]\right\}.}$$

Partie III.

1. La fonction cotangente est dérivable sur $]0,\pi[$ comme quotient de deux fonctions dérivables (cosinus et sinus), le dénominateur (sinus) ne s'annulant pas sur cet intervalle. On obtient

$$\forall x \in]0,\pi[,\ \operatorname{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Cette dérivée est strictement négative sur l'intervalle $]0,\pi[$
donc $\boxed{\text{la fonction cotangente est strictement décroissante sur }]0,\pi[.}$.

2. $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5} < \frac{3\pi}{5} < \frac{4\pi}{5} < \pi$. Puisque la fonction cotangente est strictement décroissante sur $]0,\pi[$, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right) > \operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right) > \operatorname{cotan}\left(\frac{3\pi}{5}\right) > \operatorname{cotan}\left(\frac{4\pi}{5}\right).}$$

3. Les solutions obtenues à la partie I sont les mêmes que celles de la partie II. Dans les deux cas, nous avons classé ces quatre solutions dans l'ordre croissant. On en déduit que

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}},\ \operatorname{cotan}\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}},$$
$$\boxed{\operatorname{cotan}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}},\ \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.}$$

4. Soit $x \in]0,\pi[$. Par définition, $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ donc $\operatorname{cotan}^2(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$. La relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donne d'une part : $(1+\operatorname{cotan}^2(x))\cos^2(x) = \operatorname{cotan}^2(x)$,
d'autre part : $(1+\operatorname{cotan}^2(x))\sin^2(x) = 1$.
En divisant par $1+\operatorname{cotan}^2(x) > 0$, on obtient :

$$\cos^2(x) = \frac{\operatorname{cotan}^2(x)}{1+\operatorname{cotan}^2(x)} \text{ et } \sin^2(x) = \frac{1}{1+\operatorname{cotan}^2(x)}.$$

Ceci est valable pour tout $x \in]0,\pi[$ donc en particulier pour $x = \dfrac{\pi}{5}$. Or $\dfrac{\pi}{5}$ appartient à $]0, \dfrac{\pi}{2}]$, intervalle sur lequel le cosinus et le sinus sont positifs. On en déduit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}{1+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}}.$$

On en déduit que $\cos\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{5}{10+2\sqrt{5}}}$. Après simplification, on obtient :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.}$$