BCPST 1.1 & 1.2

# Devoir Surveillé n°3

**Samedi 16 novembre 2024**

# – Sommes, Nombres complexes et Applications –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

**Les conclusions des questions, devront être soulignés ou $\boxed{\textbf{encadrés}}$.**

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**

**Le sujet comporte 2 pages.**

## Exercice 1. Une somme, un peu d'informatique.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on définit :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Écrire une fonction python `somme` qui prend en entrée un entier supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la valeur de la somme $\mathrm{S}_n$.
2. Que faut-il taper dans le shell pour obtenir $\mathrm{S}_{100}$ ?
3. Écrire une fonction python `seuil` qui ne prend aucune variable d'entrée et qui renvoie le plus petit entier $n$ tel que $\mathrm{S}_n \geqslant 0.6$.
4. Montrer que $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$.
5. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1}$.
6. En déduire que $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\mathrm{S}_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

## Exercice 2. Etude de fonctions.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{3x-2}$.

1. Déterminer $\mathrm{D}_f$ l'ensemble de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathrm{D}_f$ et calculer sa dérivée.
3. Établir le tableau de variation de $f$.
   On justifiera précisément l'étude du signe de la dérivée et les calculs de limites.
4. Déterminer l'ensemble image $f(\mathrm{D}_f)$.
5. Justifier que $f$ est une bijection de $\mathrm{D}_f$ dans $f(\mathrm{D}_f)$ et déterminer la bijection réciproque de $f$.
6. Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble des images et une expression de la fonction $f \circ f$.

## Problème.

La fonction cotangente, notée cotan, est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $\mathrm{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

L'objectif de cet exercice est de résoudre de deux manières différentes l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$$(\mathrm{E}) : \ (z + \mathbf{i})^5 = (z - \mathbf{i})^5$$

puis d'en déduire les valeurs de $\mathrm{cotan}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\mathrm{cotan}\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

## Préambule.

1. Pour quelles valeurs de $\theta$, la fraction $\dfrac{1+\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}$ est-elle définie ?
2. Dans ce cas, simplifier la fraction. On pourra penser à factoriser par $e^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}$.

## Partie I.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathrm{E}')$ : $5\mathbf{X}^2 - 10\mathbf{X} + 1 = 0$.
2. Les racines sont-elles réelles ? Si oui, quel est leur signe ?
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Développer $(z+\mathbf{i})^5$ et $(z-\mathbf{i})^5$.
4. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z$ est solution de (E) si, et seulement si, $z$ est solution d'une équation de degré 4 à coefficients réels à déterminer ;
5. ... puis que :

$$z \text{ est solution de (E)} \iff \begin{cases} z^2 = \dfrac{5-2\sqrt{5}}{5} \\ \text{ou} \\ z^2 = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

6. Résoudre (E).
7. Vérifier que les solutions de (E) sont réelles et les classer dans l'ordre croissant.

## Partie II.

1. Montrer que $\mathbf{i}$ n'est pas solution de (E).
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que :

$$(z+\mathbf{i})^5 = (z-\mathbf{i})^5 \iff \left(\frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}}\right)^5 = 1.$$

3. On considère l'équation $(\mathrm{E}'')$ : $\mathrm{Z}^5 = 1$, d'inconnue $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que si Z est solution de $(\mathrm{E}'')$, alors $|\mathrm{Z}| = 1$.
   Dans la question suivante, on pourra donc chercher les solutions de $(\mathrm{E}'')$ sous la forme $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$.
   (b) Résoudre $(\mathrm{E}'')$ (indication : on doit trouver 5 solutions).
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déduire des questions précédentes que :

$$z \text{ est solution de (E)} \iff \text{il existe } k \in [\![0,4]\!] \text{ tel que } \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}.$$

5. Montrer que si $k = 0$, l'équation $\dfrac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}$ n'a pas de solution.
6. En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{5}\right),\ k \in [\![1,4]\!]\right\}.$$

## Partie III.

1. Montrer que la fonction cotangente est strictement décroissante sur $]0, \pi[$.
2. Classer les solutions de (E) obtenues dans la partie II dans l'ordre (strictement) croissant.
3. En comparant les solutions de (E) obtenues à la partie I et celles de la partie II, en déduire les valeurs de $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
4. **Bonus. A ne traiter que si le reste est terminé.**
   En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.