Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

Correction

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ & - & 3y & - & z & = & -5 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ & - & 3y & - & z & = & -5 \\ & - & 2y & - & z & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ & - & 3y & - & z & = & -5 \\ & & & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4 - y - 2z \\ y & = & \dfrac{z-5}{-3} \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

Donc le système est de rang 3. C'est un système de Cramer et $S = \{(-1, 1, 2)\}$.

2. $\left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 1 \\ 4z = 3 \end{array}\right.$

Correction Le système est échelonné de rang 2.

$$\left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 1 \\ 4z = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = 1 + y - 2z \\ z = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = y - \dfrac{1}{2} \\ z = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

Donc le système est compatible et $S = \left\{\left(y - \dfrac{1}{2}, y, \dfrac{3}{4}\right), y \in \mathbb{R}\right\}$.

3. $\left\{\begin{array}{r} 2x + 2y - z = -1 \\ x + 4y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{array}\right.$

Correction

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 2y - z = -1 \\ x + 4y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x + 4y + z = -2 \\ 2x + 2y - z = -1 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x + 4y + z = -2 \\ -6y - 3z = 3 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x + 4y + z = -2 \\ -6y - 3z = 3 \\ -6y - 3z = 3 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x + 4y + z = -2 \\ -6y - 3z = 3 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

Le système est donc de rang 2, compatible et $S = \left\{(z, \dfrac{-z-1}{2}, z), z \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 2 Déterminer, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions du système suivant

1. $\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 3x + ay = 1 \end{cases}$

Correction On détermine un système échelonné équivalent.

$$\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 3x + ay = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x + ay = 1 \\ ax + 3y = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow 3L_2 - aL_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x + ay = 1 \\ (a^2 - 9)\, y = a - 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq 3$ et $a \neq -3$, on peut diviser par $(a-3)(a+3)$ et

$$\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 3x + ay = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{a^2-9} L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x + ay = 1 \\ \\ y = \dfrac{1}{a+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - ay}{3} \\ \\ y = \dfrac{1}{a+3} \end{cases}$$

Le système est de Cramer et $S = \left\{\left(\dfrac{1}{a+3}, \dfrac{1}{a+3}\right)\right\}$.

- Si $a = 3$,

$$\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 3x + ay = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - ay}{3} \\ \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est compatible et $S = \left\{\left(\dfrac{1-3y}{3}, y\right),\ y \in \mathbb{R}\right\}$.

- Si $a = -3$,

$$\begin{cases} ax + 3y = 1 \\ 3x + ay = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 0 = -6 \end{cases}$$

Le système est incompatible et $S = \varnothing$.

2. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$

Correction On détermine un système échelonné équivalent.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (a-2)y + 4z = 1 \end{cases}$$

- Si $a = 2$, le système est échelonné de rang 3 et $S = \left\{(1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4})\right\}$.
- Si $a \neq 2$, on continue l'algorithme de Gauss.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (a-2)y + 4z = 1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (a-2)L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+1)z = 1 \\ (6 + a - a^2)z = 3 - a \end{cases}$$

Or, $6 - a - a^2 = -(a-3)(a+2)$ donc

- Si $a=3$, le système initial est équivalent à $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ 0=0 \end{cases}$.

  Le système est de rang 2 et $S=\{(5z,1-4z,z), z\in\mathbb{R}\}$.

- Si $a=-2$, le système initial est équivalent à $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y-zz=1 \\ 0=5 \end{cases}$.

  Le système est incompatible et $S=\varnothing$.

- Si $a\neq 2$, $a\neq 3$, $a\neq -2$, le système est de rang 3 et $S=\left\{\left(1,\dfrac{1}{a+2},\dfrac{1}{a+2}\right)\right\}$.

Exercice 3 Résoudre les systèmes suivants

1. $\begin{cases} x-y+z-t=1 \\ x+y-z-t=-1 \\ x+y+z-t=0 \\ x-y-z+t=2 \end{cases}$

   Correction $S=\left\{\left(1,\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2},1\right)\right\}$.

2. $\begin{cases} x-2y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases}$

   Correction $S=\left\{\left(\dfrac{z+t-1}{5},\dfrac{3z-7t-3}{5},z,t\right),(z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}$

3. Soit $m\in\mathbb{R}$ fixé. $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-y+z-t=0 \\ x-3y-2t=m \end{cases}$

   Correction $S=\{(-3-2m+2t,-m-1,5+3m-3t,t),\ t\in\mathbb{R}\}$

Exercice 4 Soit $f:\begin{cases} \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (x,y)\mapsto(x+y,x-y) \end{cases}$

Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Correction Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ fixé quelconque.

$$f(x,y)=(a,b)\Leftrightarrow\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=a-x \\ 2x=a+b \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\dfrac{a-b}{2} \\ x=\dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

Le système est de Cramer donc f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $f^{-1}:\begin{cases} \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ (a,b)\mapsto\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a-b}{2}\right) \end{cases}$

Exercice 5 Soit u la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ u(x,y,z)=(-x+y,x-y,-x+z,-y+z)$$

Est-ce que u est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$?

Correction Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$f(x, y, z) = (a, b, c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = a \\ x - y = b \\ -x + z = c \\ -y + z = d \end{cases}$$

On remarque alors que cela implique que $a = -b$. Donc, $(1, 1, 0, 0)$ n'a pas d'antécédent par f. Donc, f n'est pas bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.