Corrigé du devoir maison n° 4

— —

Exercice 1 - Calculs.

1. (a) Il s'agit de $5-$combinaisons d'un ensemble de cardinal 7 donc il y a $\boxed{\binom{7}{5} = 21 \text{ tirages possibles.}}$

   (b) Il s'agit de $4-$listes (avec d'éventuelles répétitions) d'un ensemble de cardinal 10 donc il y a $\boxed{10^4 \text{ codes possibles.}}$

   (c) Pour construire un anagramme,
   - on place les 2 C : $\binom{8}{2}$ choix
   - on place les 2 O dans les 6 places restantes : $\binom{6}{2}$ choix
   - on place les 4 lettres restantes dans les 4 places. Il s'agit donc de permutations : 4! choix

   Il y a donc $\boxed{\binom{8}{2}\binom{6}{2}4! = \frac{8!}{2!2!} \text{ anagrammes.}}$

   (d) Chaque ligne correspond à un choix de 2 villes parmi les 20 donc il y a $\boxed{\binom{20}{2} = 190 \text{ lignes.}}$

   (e) Soit n le nombre de villes desservies. Comme à la question précédente, le nombre de lignes est donc $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. On cherche donc n tel que $\frac{n(n-1)}{2} = 45$ ou encore $n(n-1) = 90$.
   On remarque alors que $9 \times 10 = 90$ donc $\boxed{n = 10}$.
   Ou alors, on peut calculer le discriminant et en déduire les racines.

2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & t & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & t & = & 1 \\ 4x & + & 6y & - & 2z & + & 2t & = & 2 \\ x & + & 2y & - & 2z & + & 2t & = & \lambda \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & + & y & + & z & - & t & = & 2 & \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & -3 & L2 \leftarrow L2 - 2L1 \\ & & 2y & - & 6z & + & 6t & = & -6 & L3 \leftarrow L3 - 4L1 \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & \lambda - 2 & L4 \leftarrow L4 - L1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x & + & y & + & z & - & t & = & 2 & \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & -3 & \\ & & & & & & 0 & = & 0 & L3 \leftarrow L3 - 2L2 \\ & & & & & & 0 & = & \lambda + 1 & L4 \leftarrow L4 - L1 \end{array}\right.$$

Ce système est échelonnée, avec deux équations de compatibilité. Il est de rang 2.
Si $\lambda \neq -1$, le système est incompatible. $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est } \emptyset}$.
Si $\lambda = -1$, les équations de compatibilité sont satisfaites. Le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & - & t & = & 2 \\ & & y & - & 3z & + & 3t & = & -3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & = & 2 & - & z & + & t \\ & & y & = & -3 & + & 3z & - & 3t \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 5 & - & 4z & + & 4t \\ y & = & -3 & + & 3z & - & 3t \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \{(5 - 4z + 4t, -3 + 3z - 3t, z, t), (z, t) \in \mathbb{R}^2\}}$.

Exercice 2 - Étude d'une suite récurrente.

1. Étude de f

   (a) f est une fraction rationnelle. Son dénominateur s'annule uniquement en $x = -\frac{1}{2}$.

   $\boxed{\text{Donc } f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}}$.

(b) f est une fraction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, $\mathcal{D}$,

et $\boxed{\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \dfrac{3}{(1+2x)^2}}$.

(c) $\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur les intervalles qui composent son ensemble de définition :

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty, -\frac{1}{2}[\text{ et strictement croissante sur }]-\frac{1}{2}, +\infty[}$.

2. **Étude d'une suite.**

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n \text{« } u_n \text{ existe et } 0 < u_n < 1 \text{ »}$$

• **Initialisation :** $u_0 = \dfrac{1}{2}$ d'après l'énoncé. Donc $0 < u_0 < 1$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

Alors $0 < u_n < 1$ donc $u_n \neq -\dfrac{1}{2}$. Donc $u_n \in \mathcal{D}$. Ainsi, $f(u_n)$ existe. De plus, $0 < u_n < 1$ et f est strictement croissante sur $]-\dfrac{1}{2}, +\infty[$. Donc $f(0) < f(u_n) < f(1)$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Ainsi, $0 < u_{n+1} < 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• **Conclusion :** Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1}$.

(b) Puisque la suite est à termes strictement positifs, on peut étudier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{1+2u_n}$. Or $0 < u_n < 1$ donc $0 < 1 + 2u_n < 3$. Donc, en appliquant la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{1+2u_n}$. D'où $1 < \dfrac{3}{1+2u_n}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. $\boxed{\text{Donc la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

(c) On a montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - u_n \neq 0$.

$\boxed{\text{Donc la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie}}$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n-3u_n} = 3\dfrac{u_n}{1-u_n} = 3v_n$.

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison 3}}$.

(e) On déduit de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3^n v_0$. Or $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = 1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3^n}$.

(f) Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$, on a $v_n - v_n u_n = u_n$, donc $u_n(1+v_n) = v_n$. Or $v_n > 0$ (c'est 3^n) donc $1 + v_n > 0$. On en déduit : $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3^n}{1+3^n}}$.

(g) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{3^n}{3^n(1+\frac{1}{3^n})} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

Or $|\frac{1}{3}| < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. On en déduit, par somme puis quotient des limites : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

3. **Informatique**

(a)
```python
def suite(n):
    u = 1/2
    for i in range(n):
        u = 3*u/(1+2*u)
    return u
```

```python
def produit(n):
    u = 1/2
    p = u
    for i in range(n):
        u = 3*u/(1+2*u)
        p = p * u
    return p
```

(b)

```python
def assez_grand(e):
    u = 1/2
    n = 0
    while u<=1-e:
        u = 3*u/(1+2*u)
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 3 - EDL du premier ordre.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^3+t^2+1}{t^2+t-2}$ est continue sur $]1,+\infty[$ donc $\boxed{\text{l'équation est bien définie sur }]1,+\infty[}$.
2. Soit $(E_H) : y' - y = 0$.
   Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène.
   Donc, $\boxed{S_H = \left\{ \begin{array}{l}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda.\mathbf{e}^t \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$.
3. Pour $t \in]1,+\infty[$, on pose $h(t) = \dfrac{t^3+t^2+1}{t^2+t-2}$.
   (a) On raisonne par analyse-synthèse.
      i. **Analyse** Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que
      $$\forall t \in]1,+\infty[,\ h(t) = t + \frac{at+b}{t^2+t-2}$$
      Alors, $\forall t \in]1,+\infty[,\ h(t) = \dfrac{t^3+t^2-2t+at+b}{t^2+t-2} = \dfrac{t^3+t^2+(a-2)t+b}{t^2+t-2}$.
      Par identification, $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 1}$.
      ii. **Synthèse** On vérifie ensuite que ces deux réels conviennent bien.
   (b) La fonction h est continue sur $]1,+\infty[$ donc elle admet des primitives sur $]1,+\infty[$.
   En utilisant l'expression de h obtenue à la question précédente, on peut prendre H définie par
   $\boxed{\forall t \in]1,+\infty[,\ H(t) = \dfrac{t^2}{2} + \ln(t^2+t-2)}$.
4. On va appliquer la méthode de variation de la constante.
   On cherche f_1 sous la forme $\forall t \in]1,+\infty[,\ f_1(t) = \lambda(t)\mathbf{e}^t$. On a $\forall t \in]1,+\infty[,\ f_1'(t) = \lambda'(t)\mathbf{e}^t + \lambda(t)\mathbf{e}^t$.
   $$\begin{aligned} f_1 \text{ est solution de } (E_1) \ &\Leftrightarrow\ \forall t \in]1,+\infty[,\ \lambda'(t)\mathbf{e}^t + \lambda(t)\mathbf{e}^t - \lambda(t)\mathbf{e}^t = \frac{t^3+t^2+1}{t^2+t-2}\mathbf{e}^t \\ &\Leftrightarrow\ \forall t \in]1,+\infty[,\ \lambda'(t)\mathbf{e}^t = \frac{t^3+t^2+1}{t^2+t-2}\mathbf{e}^t \\ &\Leftrightarrow\ \forall t \in]1,+\infty[,\ \lambda'(t) = \frac{t^3+t^2+1}{t^2+t-2} = h(t) \end{aligned}$$
   Donc, on peut prendre $\forall t \in]1,+\infty[,\ \lambda(t) = H(t) = \dfrac{t^2}{2} + \ln(t^2+t-2)$.
   Donc, $\boxed{\forall t \in]1,+\infty[,\ f_1(t) = \left[\dfrac{t^2}{2} + \ln(t^2+t-2)\right]\mathbf{e}^t}$

5. On pose $\forall t \in]1,+\infty[,\ f_2(t) = \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
On a $\forall t \in]1,+\infty[,\ f_2'(t) = -\lambda\sin(t) + \mu\cos(t)$.

$$\begin{aligned}
f_2 \text{ est solution de } (E_2) &\Leftrightarrow \forall t \in]1,+\infty[,\ -\lambda\sin(t) + \mu\cos(t) - \lambda\cos(t) - \mu\sin(t) = \cos(t)\\
&\Leftrightarrow \forall t \in]1,+\infty[,\ (\mu-\lambda)\cos(t) + (-\lambda-\mu)\sin(t) = \cos(t)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \mu - \lambda = 1 \\ -\lambda - \mu = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \lambda + 1 \\ -2\lambda = 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = \dfrac{-1}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\forall t \in]1,+\infty[,\ f_2(t) = \dfrac{\sin(t)-\cos(t)}{2}}$.

6. Par le principe de superposition, $f_1 + f_2$ est une solution particulière de (E). On en déduit que

$$\boxed{S = \left\{ \begin{array}{l}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda.\mathbf{e}^t + \left[\dfrac{t^2}{2} + \ln(t^2+t-2)\right]\mathbf{e}^t + \dfrac{\sin(t)-\cos(t)}{2} \end{array} ,\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$$

Exercice 4 - EDL du second ordre.

$$(E):\ y''\cos(t) - 2y'\sin(t) + 3y\cos(t) = 0$$

1. On note $(E_\alpha): y'' - \alpha y = 0$. C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, homogène. Elle a pour équation caractéristique $r^2 - \alpha = 0$.
<u>Si $\alpha = 0$:</u>
L'équation caractéristique admet 0 pour racine double (cas $\Delta = 0$).
Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est $\boxed{\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & At+B \end{array} ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.
<u>Si $\alpha < 0$:</u>
L'équation caractéristique admet deux racines complexes $i\sqrt{-\alpha}$ et $-i\sqrt{-\alpha}$ (cas $\Delta < 0$).
Donc l'ensemble des solutions de (E_α) est $\boxed{\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\cos(t\sqrt{-\alpha}) + B\sin(t\sqrt{-\alpha}) \end{array} ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.
<u>Si $\alpha > 0$:</u>
L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$ (cas $\Delta > 0$).
Donc l'ensemble des solutions de (E_α) est $\boxed{\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ae^{t\sqrt{\alpha}} + Be^{-t\sqrt{\alpha}} \end{array} ,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

2. Soit f et g deux fonctions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. On suppose que $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ g(t) = f(t)\cos(t)$. On pose $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) On doit montrer une équivalence (« si et seulement si »). On va faire une démonstration en deux temps.
   • On suppose que f est dérivable sur I.
   Alors g est le produit de deux fonctions dérivables sur I, f et cos. Donc g est dérivable sur I.
   • Réciproquement, on suppose que g est dérivable sur I. Alors, puisque la fonction cosinus ne s'annule pas sur I, $\forall t \in I,\ f(t) = \dfrac{g(t)}{\cos(t)}$. Donc f est le quotient de deux fonctions dérivables sur I, le dénominateur ne s'annulant pas sur I. Donc f est dérivable sur I.

   (b) Par formule de dérivation d'un produit de fonctions dérivables,
   $\boxed{\forall t \in I,\ g'(t) = f'(t)\cos(t) - f(t)\sin(t) \text{ et } g''(t) = f''(t)\cos(t) - 2f'(t)\sin(t) - f(t)\cos(t)}$.

(c) On suppose que f est g sont deux fois dérivables sur I. Déterminons une condition nécessaire et suffisante pour que f soit solution de (E) sur I :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) \text{ sur I} &\iff \forall t \in I,\ f''(t)\cos(t) - 2f'(t)\sin(t) + 3f(t)\cos(t) = 0 \\
&\iff \forall t \in I,\ \underbrace{\left(f''(t)\cos(t) - 2f'(t)\sin(t) - f(t)\cos(t)\right)}_{g''(t)} + 4\underbrace{f(t)\cos(t)}_{g(t)} = 0 \\
&\iff \forall t \in I,\ g''(t) + 4g(t) = 0 \\
&\iff g \text{ est solution de } (E') : y'' + 4y = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ si, et seulement si, } g \text{ est solution de } (E') : y'' + 4y = 0}$

(d) D'après la première question (à adapter sur I), l'ensemble des solutions de (E') sur I est

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\cos(2t) + B\sin(2t) \end{array} \quad , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

(e) On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur I : $\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\dfrac{\cos(2t)}{\cos(t)} + 2B\sin(t) \end{array} \quad , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$