Exercice 1 On définit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Parmi les matrices, lesquelles peut-on multiplier ? Donner la taille des produits puis les calculer.
   Correction On peut former les produits suivants :

   - $AC \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $AC = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - $DA \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $DA = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -5 \end{pmatrix}$
   - $CB \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $CB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$
   - $BE \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $BE = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
   - $E \times D \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $E \times D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - $DC \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et $DC = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$
   - $CE \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $CE = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$
   - $B^2 \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
   - $A^2 \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -5 \\ 8 & 13 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Donner leur transposée.
   Correction

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ E^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $A(x)A(y)$.
2. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Déterminer $(A(x))^n$.

Correction

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcll} & & & \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix} \\ A(x)A(y) & = & \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & -\cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y) \\ \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} & \\ A(x)A(y) & = & A(x+y) & \end{array}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On va démontrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ (A(x))^k = A(kx)$.
   Posons pour $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$: "$(A(x))^k = A(kx)$"
   Initialisation : Pour $k = 0$, $A(x)^0 = I_2$ et $A(0x) = A(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = I_2$
   donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $P(k)$ est vrai.
   $$\begin{array}{rcl} (A(x))^{k+1} & = & (A(x))^k \times A(x) \\ & = & A(kx) \times A(x) \text{ par l'hypothèse de récurrence} \\ & = & A(kx + x) \text{ par la question 1} \\ & = & A((k+1)x) \end{array}$$
   Conclusion : On a donc démontré que $\forall k \in \mathbb{N},\ (A(x))^k = A(kx)$.

Exercice 3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

1. Pour les puissances de N, on calcule les premières puissances.
   $$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ N & N^2 & N^3 \end{array}$$
   Donc, $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq 3, N^k = 0_3$.
2. Pour les puissances de A, on va calculer les premières puissances et conjecturer une formule.
   $$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ A & A^2 & A^3 \end{array}$$
   On remarque alors que $A^3 = -I_2$. On en déduit que : $A^4 = -A$, $A^5 = -A^2$ et $A^6 = I_2$.
   Puis, $A^7 = A$, ...
   La forme de la puissance va donc dépendre du reste dans la division euclidienne de k par 6.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists!(\ell, r) \in \mathbb{N} \times [\![0, 5]\!]$ tel que $k = 6\ell + r$.

$$A^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{pour } k = 6\ell \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pour } k = 6\ell + 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{pour } k = 6\ell + 2 \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{pour } k = 6\ell + 3 \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pour } k = 6\ell + 4 \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{pour } k = 6\ell + 5 \end{cases}$$

3. Pour les puissances de B, on fait la même chose.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2b & a^3 \end{pmatrix} \\ B & B^2 & B^3 \end{array}$$

On propose donc de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* : B^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k \end{pmatrix}$

Initialisation : Pour $k = 1$, on trouve bien à droite la définition de B donc P(1) est vraie.
Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la formule est vraie.

$$\begin{array}{rcc} & & \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \\ B^{k+1} = B^k \times B = & \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ ka^kb + ba^k & a^{k+1} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ (k+1)a^kb & a^{k+1} \end{pmatrix} & \end{array}$$

Conclusion : La formule proposée est vraie.

4. Pour la matrice C, on va appliquer le binôme de Newton. On sépare C sous la forme $C = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices N et I_3 commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ C^k = (I_3 + N)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} N^\ell I_3^{k-\ell}$$

Nous avons remplacé le calcul des puissances de C par celui des puissances de N.

Or, pour $l \geq 3$, $N^l = 0_3$ donc la somme précédente s'arrête à l'indice $\ell = 2$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ C^k &= \binom{k}{0}N^0 + \binom{k}{1}N + \binom{k}{2}N^2 = I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2}N^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & k & k + \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & k & \dfrac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. Pour la matrice D, nous également appliquer le binôme de Newton. On sépare D sous la forme $C = I_3 + M$ où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices M et I_3 commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = (I_3 + M)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{l} M^\ell I_3^{k-\ell}$$

Nous avons remplacé le calcul des puissances de D par celui des puissances de M. Toutefois, ces dernières sont beaucoup plus faciles à calculer.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
M & M^2 & M^3
\end{array}$$

La somme précédente s'arrête donc à l'indice $\ell = 2$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ D^k &= \binom{k}{0}M^0 + \binom{k}{1}M + \binom{k}{2}M^2 = I_3 + kM + \frac{k(k-1)}{2}M^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & \dfrac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 4 Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction

1. Pour les matrices de taille 2×2, on sait que la valeur du déterminant est un critère d'inversibilité. $\det(A) = -1\times 1 - 2\times 1 = -3 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Pour les matrices de taille 2×2, on sait que la valeur du déterminant est un critère d'inversibilité. $\det(B) = 1\times 1 - \mathbf{i}\times\mathbf{i} = 2 \neq 0$ donc B est inversible et $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix}$.
3. On va appliquer la méthode du pivot de Gauss. Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
CX = B \quad &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +3z & = & b_1 \\ 2x & +y & & = & b_2 \\ x & +y & +z & = & b_3 \end{array}\right. \\
&\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +3z & = & b_1 \\ & -y & -6z & = & -2b_1+b_2 \\ x & +y & +z & = & b_3 \end{array}\right. \\
&\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +3z & = & b_1 \\ & -y & -6z & = & -2b_1+b_2 \\ & & -2z & = & -b_1+b_3 \end{array}\right. \\
&\underset{L_3\leftarrow \frac{-1}{2}L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +3z & = & b_1 \\ & -y & -6z & = & -2b_1+b_2 \\ & & z & = & \dfrac{b_1-b_3}{2} \end{array}\right. \\
&\underset{L_2\leftarrow L_2+6L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +3z & = & b_1 \\ & -y & & = & b_1+b_2-3b_3 \\ & & z & = & \dfrac{b_1-b_3}{2} \end{array}\right. \\
&\underset{L_1\leftarrow L_1-3L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{cccc} x & +y & = & \dfrac{-b_1+3b_3}{2} \\ & -y & = & b_1+b_2-3b_3 \\ & z & = & \dfrac{b_1-b_3}{2} \end{array}\right. \\
&\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{cccc} x & & = & \dfrac{b_1+2b_2-3b_3}{2} \\ & -y & = & b_1+b_2-3b_3 \\ & z & = & \dfrac{b_1-b_3}{2} \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & & = & \dfrac{b_1+2b_2-3b_3}{2} \\ & y & = & -b_1-b_2+3b_3 \\ & z & = & \dfrac{b_1-b_3}{2} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le système admet une unique solution donc A est inversible et
$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{-3}{2} \\ -1 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. De même, on obtient que D est inversible et que $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A(A^2 - 3I_3) = -3I_3$.
2. En déduire que A est inversible et la valeur de son inverse.

Correction

1. On calcule A^2 puis $A^2 - 3I_3$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc, $A^2 - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule $A(A^2 - 3I_3)$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc, $A(A^2 - 3I_3) = -3I_3$.

2.
$$\begin{aligned} A(A^2 - 3I_3) = -3I_3 \quad & \Leftrightarrow \quad A \times (-\frac{1}{3}A^2 + I_3) = I_3 \\ & \Leftrightarrow \quad (-\frac{1}{3}A^2 + I_3) \times A = I_3 \end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = I_3 - \frac{1}{3}A^2$.

Exercice 6 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$.

1. On veut résoudre l'équation $AX = B$ d'inconnues X. Quelle est la taille de la matrice X ? Déterminer les solutions X.
2. On veut résoudre l'équation $YA = B$ d'inconnues Y. Quelle est la taille de la matrice Y ? Déterminer les solutions Y.

Correction

1. Pour pouvoir faire le produit AX, il faut que la matrice X ait 2 lignes. Pour résoudre $AX = B$, il faut que le produit AX soit de la même taille que la matrice B donc il faut que AX ait 3 colonnes : $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
   $\det(A) = -5 - 1 \neq 0$ donc A est inversible et $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

2. Pour pouvoir faire le produit YA, il faut que Y ait 2 colonnes. Pour résoudre $YA = B$, il faut que le produit YA soit de la même taille que B. Or, dans ce cas, le produit YA a 2 colonnes, ce qui est incompatible avec $YA = B$.
Cette équation matricielle n'a aucune solution.

Exercice 7 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 2,\ u_1 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse que l'on notera P^{-1}.
2. Déterminer une matrice A telle que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
4. Déterminer la matrice D (qui est une matrice diagonale) définie par : $D = P^{-1}AP$.
5. Montrer que $A = PDP^{-1}$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice D^n. **On ne demande aucune démonstration**.
7. En déduire la matrice A^n (sous forme d'un tableau).
8. En déduire X_n, puis u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Correction

1. P est une matrice carrée d'ordre 2. Calculons : $\det P = 1 \neq 0$,
$\boxed{\text{donc } P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$.
2. Soit $n :\in \mathbb{N}$.
$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 3u_{n+1} - 2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$
Si on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
3. Montrons ce résultat par récurrence.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}_n$: "$X_n = A^n X_0$".
• $\mathcal{P}_0$ est vraie car $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors :
$$\begin{aligned} A^{n+1}X_0 &= (AA^n)X_0 \text{ par définition de la puissance n+1 de la matrice } A \\ &= A(A^n X_0) \text{ par associativité du produit matriciel} \\ &= AX_n \text{ d'après } \mathcal{P}_n \\ &= X_{n+1} \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
• Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0}$.
4. Le calcul de $D = (P^{-1}A)P$ donne : $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.
5. Par définition, $D = P^{-1}AP$. On multiplie par P à gauche. On obtient : $PD = AP$. Puis, en multipliant par P^{-1} à droite : $\boxed{A = PDP^{-1}}$.
Montrons le résultat suivant par récurrence.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence : $\mathcal{P}_n$: "$A^n = PD^nP^{-1}$".

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2 = D^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA \text{ par définition de la puissance n+1 de la matrice } A \\ &= (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) \text{ d'après } \mathcal{P}_n \text{ et la question précédente} \\ &= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \text{ par associativité du produit matriciel} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \text{ Donc } \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

6. La matrice D est une matrice diagonale. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. On a démontré que $A^n = (PD^n)P^{-1}$.
   Ainsi : $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$. Puis : $\boxed{A^n = (PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}}$.
8. On a calculé A^n en fonction de n à la question 7. Puisque $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$, on a $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   Ainsi,
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0 = \begin{pmatrix} (2-2^n).2 + (-1+2^n) \\ 2(2-2^{n+1} + (-1+2^{n+1}) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3-2^n \\ 3-2^{n+1} \end{pmatrix}}$$
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2^n \\ 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$. On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3-2^n}$.

Exercice 8 [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0$.
   Déterminer A^3 et A^4.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer que $(I_4 - A)(I_4 + A + A^2 + A^3) = I_4 - A^4$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
   (a) Quelle est la taille des matrices A^T, A^TA et AA^T ?
   (b) Quels sont les coefficients sur la diagonale de AA^T ?
   (c) Montrer que les matrices A^TA et AA^T sont symétriques.

Correction

1. $A^2 + 2A - 3I_n = 0 \Leftrightarrow A^2 = 3I_n - 2A$
   Donc, $A^3 = A.A^2 = 3A + 2A^2 = 3A - 6I_n + 4A = -6I_n + 7A$.
   De même, $A^4 = A^3.A = -6A + 7A^2 = -6A + 21I_n - 14A = 21I_n - 20A$.
2. On développe par distributivité.
   $$(I_4 - A)(I_n + A + A^2 + A^3) = I_n + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 = I_n - A^4$$
3. (a) La matrice A^T est de taille 2×3. Donc, A^TA est une matrice carrée de taille 2.
   La matrice $A.A^T$ est une matrice carrée de taille 3.
   (b) Soit $i \in [\![1, 3]\!]$.
   $$\left(A.A^T\right)_{i,i} = \sum_{k=1}^{3} (A)_{i,k}.A^T_{k,i} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}^2$$
   (c) $(A^TA)^T = A^T.(A^T)^T = A^T.A$ donc $A^T.A$ est symétrique.
   $(A.A^T)^T = (A^T)^T.A^T = A.A^T$ donc $A.A^T$ est aussi symétrique.