Chapitre 15 : Géométrie dans $\mathbb{R}^2$

Table des matières

1 Vecteurs de $\mathbb{R}^2$ **2**
1.1 Vecteurs et opérations sur les vecteurs . . . 2
1.2 Vecteurs colinéaires . . . 2
1.3 Bases de $\mathbb{R}^2$ . . . 3
1.4 Produit scalaire et vecteurs orthogonaux . . . 4
1.5 Norme euclidienne . . . 4
1.6 Bases orthonormées . . . 5

2 Plan affine. **6**
2.1 Points du plan et vecteurs. . . . 6
2.2 Cercles . . . 6
2.3 Droites du plan . . . 7
2.4 Projection orthogonale d'un point sur une droite . . . 8

1 Vecteurs de $\mathbb{R}^2$

1.1 Vecteurs et opérations sur les vecteurs

Définition 1.

On définit le plan euclidien par

$$\mathbb{R}^2 = \{\overrightarrow{u} = (x, y) \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}\}$$

Tous les éléments de $\mathbb{R}^2$ ont appelés des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. x et y sont les composantes du vecteur.

Définition 2 (Opérations sur $\mathbb{R}^2$)**.**

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ comme l'unique vecteur de composantes $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
2. On définit le vecteur $\lambda.\overrightarrow{u}$ comme l'unique vecteur de composantes $(\lambda.x_1, \lambda.y_1)$.

Théorème 3 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ sur $\mathbb{R}^2$ a les propriétés suivantes.

- **Commutativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- **Associativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\mathbb{R}^2)^3$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
- **Elément neutre** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.
- **Symétrique** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $\exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Théorème 4 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ et la loi . sur $\mathbb{R}^2$ ont les propriétés suivantes.

- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left(\lambda = 0 \text{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right)$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$ et $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.

1.2 Vecteurs colinéaires

Définition 5.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsque

$$\exists\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ tel que } \lambda_1.\overrightarrow{u} + \lambda_2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Remarque 6. Les scalaires λ_1 et λ_2 ne sont pas nuls en même temps.

Exemple 7. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (-2, -4)$ sont colinéaires.

Exemple 8. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (3, 4)$ ne sont pas colinéaires.

Théorème 9.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
2. Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient tous les deux non nuls.
   Ils sont colinéaires si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = t.\overrightarrow{v}$.

Théorème 10.

Soient $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \quad &\Longleftrightarrow \quad xy' - x'y = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

1.3 Bases de $\mathbb{R}^2$

Définition 11.

On appelle <u>base de $\mathbb{R}^2$</u> une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires.
La famille $((1,0),(0,1))$ est appelée <u>la base canonique de $\mathbb{R}^2$</u>.

Exemple 12. Soient $\overrightarrow{u} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 13 (Coordonnées dans une base)**.**

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2,\ \exists\,!(a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_1} + a\overrightarrow{e_2}$$

On dit que (a, b) sont <u>les coordonnées</u> de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exemple 14.

1. Montrer que $(\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (1,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u} = (2, -5)$ dans cette base.

Définition 15.

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$. Soit (a, b) les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.
On appelle <u>matrice de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$</u> la matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

1.4 Produit scalaire et vecteurs orthogonaux

Définition 16.

Soient $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le réel $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$ défini par

$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= xx' + yy'.$$

Définition 17.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0$.

Exemple 18.

1. $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ sont-ils orthogonaux ?
2. $(-1, 2)$ et $(2, 1)$ sont-ils orthogonaux ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de α réel les vecteurs $(1, -1)$ et $(2, \alpha)$ sont-ils orthogonaux ?

Théorème 19.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Le produit scalaire a les propriétés suivantes.

1. $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{0} >= 0$.
2. **Symétrie** : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$
3. **Positivité** : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >\geq 0$.
4. **Définition** : $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
5. **Linéarité** : $< \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} >=< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} > + < \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} >$

Théorème 20.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non nuls.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors ils ne sont pas colinéaires.

1.5 Norme euclidienne

Définition 21.

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On appelle norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$ le réel :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} >} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est unitaire lorsque $||\overrightarrow{u}|| = 1$.

Exemple 22. Déterminer les normes des vecteurs suivants : $(3, -4)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(1, 4)$.

Théorème 23.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

1. $||\overrightarrow{u}|| \geq 0$,
2. $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
3. $||\lambda \overrightarrow{u}|| = |\lambda| \; ||\overrightarrow{u}||$,
4. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > + ||\overrightarrow{v}||^2$.

Théorème 24 (Théorème de Pythagore)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$.

Théorème 25 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, Admis)**.**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leq ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.
2. On a égalité si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

1.6 Bases orthonormées

Définition 26.

On dit qu'une base de $\mathbb{R}^2$ est <u>une base orthonormée</u> lorsque les vecteurs de cette base sont orthogonaux et unitaires.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0, \\ ||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = 1. \end{array} \right.$$

Exemple 27. Soient $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ et $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 28. La base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

2 Plan affine.

2.1 Points du plan et vecteurs.

Définition 29.

Pour représenter les points du plan $\mathcal{P}$, on utilise le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où

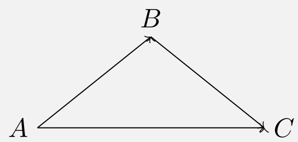
- O est l'origine du repère,
- $\overrightarrow{i}$ est le vecteur $(1,0)$
- $\overrightarrow{j}$ est le vecteur $(0,1)$

A tout point M du plan, on associe le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.
Les coordonnées de M sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Théorème 30 (Relation de Chasles)**.**

Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$.

1. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B$.
3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
4. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



Définition 31.

Trois points A, B, C du plan sont dits alignés lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Un triangle est un triplet de points (A, B, C) non alignés, on le note ABC.

2.2 Cercles

Définition 32.

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle cercle de centre A et de rayon R l'ensemble des points dont la distance à C vaut R.

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tel que } ||\overrightarrow{AM}|| = R \right\}$$

Théorème 33.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan $\mathcal{P}$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon R.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C} \quad & \Leftrightarrow \quad ||\overrightarrow{AM}||^2 = R^2 \\ & \Leftrightarrow \quad (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \end{aligned}$$

On obtient une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Exemple 34. Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$.

2.3 Droites du plan

Définition 35.

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
On appelle droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.

$$\mathcal{D} = \left\{ M \in \mathcal{P} \text{ tel que } \left(\exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{u} \right) \right\}$$

On note (AB) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Théorème 36.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \, , \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{array} \right.$$

C'est la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple 37. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1, -3)$ et $B(2, 1)$.

Théorème 38.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \beta x - \alpha y + \alpha y_A - \beta x_A = 0 \end{aligned}$$

Définition 39.

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
On appelle vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ tout vecteur orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$.

Théorème 40.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et soit $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha.x + \beta.y - \alpha.x_A - \beta.x_B = 0 \end{aligned}$$

On obtient une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple 41. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(-1, 2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1, 3)$.

Exemple 42. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(0,2)$, et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (-1,2)$.

Exemple 43. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x+2y+1=0$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Exemple 44. Déterminer une équation catésienne de la droite parallèle à $\mathcal{D} : x+2y+1=0$, passant par $(1,0)$.

Théorème 45.

L'intersection de deux droites du plan est :

1. Soit une droite. Dans ce cas, on dit que ces deux droites sont confondues.
2. Soit un point. Dans ce cas, on dit que ces deux droites sont sécantes.
3. Soit l'ensemble vide. Dans ce cas, on dit que les deux droites sont parallèles distinctes.

Exemple 46. Déterminer l'intersection des droites $\mathcal{D} : 2x-y+1=0$ et $\mathcal{D}' : -x+y+3=0$.

Methode 1.

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax+by+c=0$.

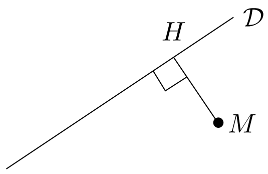
1. Les points $\left(0, \frac{-c}{b}\right)$ et $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{n} = (a,b)$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$.
3. Le vecteur $\overrightarrow{u} = (-b,a)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

2.4 Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition 47.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
Soit M un point du plan $\mathcal{P}$.
On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ l'unique point H du plan $\mathcal{P}$ tel que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$$



Exemple 48. Soit $\mathcal{D} : x+2y-1=0$ et $M(2,1)$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Définition 49.

Soit M un point du plan et $\mathcal{D}$ une droite du plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.
On appelle distance de M à $\mathcal{D}$ la distance MH. On la note $\mathrm{d}(M,\mathcal{D})$.

Exemple 50. Soit $A(1,1)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Déterminer la distance de A à $\mathcal{D}$.

Théorème 51.

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\left|\overrightarrow{AH}\right|\right|.\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$