Chapitre 16 : Géométrie dans $\mathbb{R}^3$

Table des matières

1 Vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1.1 Vecteurs et opérations sur les vecteurs

Définition 1.

On définit l'espace euclidien par

$$\mathbb{R}^3 = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \text{ avec } x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Tous les éléments de $\mathbb{R}^3$ ont appelés des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. x, y et z sont les composantes du vecteur.

Définition 2 (Opérations sur $\mathbb{R}^3$)**.**

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ comme l'unique vecteur de composantes $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
2. On définit le vecteur $\lambda.\overrightarrow{u}$ comme l'unique vecteur de composantes $(\lambda.x_1, \lambda.y_1, \lambda.z_1)$.

Théorème 3 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ sur $\mathbb{R}^3$ a les propriétés suivantes.

- **Commutativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- **Associativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\mathbb{R}^3)^3$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
- **Elément neutre** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.
- **Symétrique** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $\exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Théorème 4 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ et la loi . sur $\mathbb{R}^2$ ont les propriétés suivantes.

- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left(\lambda = 0 \text{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right)$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$ et $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.

1.2 Colinéarité et coplanarité

Définition 5.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsque

$$\exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \text{ tel que } \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Définition 6.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On dit que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsque

$$\exists\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ , } (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0) \text{ tel que } \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.$$

Exemple 7. Montrer que les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (-2, -4, -6)$ sont colinéaires.

Exemple 8. Montrer que les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (4, 0, 6)$ et $\vec{w} = (0, 8, 9)$ ne sont pas coplanaires.

Théorème 9.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient tous les deux non nuls.
   Ils sont colinéaires si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = t.\vec{v}$.

1.3 Bases de $\mathbb{R}^3$

Définition 10.

On appelle base de $\mathbb{R}^3$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non coplanaires.
La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 11. Soient $\vec{u} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right)$ et $\vec{w} = (1, 0, 0)$.
Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 12 (Coordonnées dans une base)**.**

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ \exists\,!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$$

On dit que (a, b, c) sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Exemple 13.

1. Montrer que $(\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (1, 1, 0), , \vec{e_3} = (1, 1, 1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = (2, -5, 4)$ dans cette base.

Définition 14.

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.
Soit (a, b, c) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

On appelle matrice de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne $\mathrm{mat}_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

1.4 Produit scalaire

Définition 15.

Soient $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel :

$$< \vec{u}, \vec{v} >= xx' + yy' + zz'.$$

Définition 16.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>= 0$.

Théorème 17.

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire a les propriétés suivantes.

1. $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{0}>= 0$.
2. **Symétrie** : $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>=<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}>$
3. **Positivité** : $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}>\geq 0$.
4. **Définition** : $<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}>= 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
5. **Linéarité** : $<\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}>=<\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}> + <\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}>$

Théorème 18.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non nuls.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors ils ne sont pas colinéaires.

1.5 Norme euclidienne

Définition 19.

Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On appelle norme euclidienne de $\overrightarrow{u}$ le réel :

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}>} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est unitaire lorsque $||\overrightarrow{u}|| = 1$.

Théorème 20.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

1. $||\overrightarrow{u}|| \geq 0$,
2. $||\overrightarrow{u}|| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
3. $||\lambda\overrightarrow{u}|| = |\lambda| \; ||\overrightarrow{u}||$,
4. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2 <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> + ||\overrightarrow{v}||^2$.

Théorème 21 (Théorème de Pythagore)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2$.

Théorème 22 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, Admis)**.**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. $| < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > | \leq ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.
2. On a égalité si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

1.6 Bases orthonormées

Définition 23.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3$ une base de $\mathbb{R}^3$.
On parle de base orthonormée lorsque les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et unitaires.

$$\begin{cases} < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0, \\ < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} >= 0, \\ < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >= 0, \\ ||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{w}|| = 1. \end{cases}$$

Exemple 24. Soient $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et $\overrightarrow{w} = (1, 0, 0)$. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est-elle une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$?

Remarque 25. La base canonique est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

2 Espace affine.

2.1 Points de l'espace et vecteurs.

Définition 26.

Pour représenter les points de l'espace $\mathcal{E}$, on utilise le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où

- O est l'origine du repère,
- $\overrightarrow{i}$ est le vecteur $(1, 0, 0)$
- $\overrightarrow{j}$ est le vecteur $(0, 1, 0)$
- $\overrightarrow{l}$ est le vecteur $(0, 0, 1)$

A tout point M de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.
Les coordonnées de M sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace $\mathcal{E}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Théorème 27 (Relation de Chasles)**.**

Soient A, B et C trois points de l'espace $\mathcal{E}$.

1. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B$.
3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
4. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Définition 28.

Trois points A, B, C du plan sont dits alignés lorsque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
Un triangle est un triplet de points (A, B, C) non alignés, on le note ABC.

2.2 Plans de l'espace

Définition 29.

Soit A un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ deux vecteurs non colinéaires.
On définit le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient coplanaires.

Théorème 30.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $(\overrightarrow{u} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \overrightarrow{v} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2))$ deux vecteurs non colinéaires.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \ , \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t\alpha_1 + t'\alpha_2 \\ y = y_A + t\beta_1 + t'\beta_2 \\ z = z_A + t\gamma_1 + t'\gamma_2 \end{array} \right.$$

C'est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

Exemple 31. Soient $A(1, 0, 2)$, $B(0, -1, 3)$ et $C(1, 2, 3)$. Déterminer un système d'équations paramétriques du plan passant par A, B et C.

Définition 32.

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
On appelle vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

Théorème 33.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{w} = (a, b, c)$ un vecteur non nul.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{w}$.

$$\begin{array}{rcl} M(x, y, z) \in \mathcal{P} & \Leftrightarrow & \vec{AM}.\vec{w} = 0 \\ & \Leftrightarrow & a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \end{array}$$

C'est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Methode 1.

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
Pour trouver un vecteur normal, on résout le système $\left\{ \begin{array}{l} < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{n} >= 0 \\ < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} >= 0 \end{array} \right.$

Methode 2.

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Exemple 34. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(-1, 2, 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1, 3, -2)$.

Exemple 35. Soit $\mathcal{P}$ le plan de l'espace passant par $B(1, 2, 0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(-1, 1, 2)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

2.3 Intersection de plans

Définition 36.

On dit que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Remarque 37. Si $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$,
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux si, et seulement si, $aa' + bb' + cc' = 0$.

Exemple 38. Déterminer une équation cartésienne d'un plan orthogonal au plan $\mathcal{P} : 2x - y + z + 1 = 0$ passant par $A(1, 1, 1)$. Un tel plan est-il unique ?

Définition 39.

On dit que deux plans de l'espace sont parallèles s'ils admettent des vecteurs normaux colinéaires.
En d'autres termes, deux plans sont parallèles s'ils ont un vecteur normal commun.

2.4 Droites de l'espace

Définition 40.

Soit A un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
On appelle droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ tous les points M de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.

$$\mathcal{D} = \left\{ M \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left(\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}\right) \right\}$$

Théorème 41.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \;, \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{array} \right.$$

C'est une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Théorème 42.

L'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'espace est :

1. Soit un plan ($\mathcal{P} = \mathcal{P}'$). Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus (en particulier, ils sont parallèles).
2. Soit l'ensemble vide. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles distincts.
3. Soit une droite. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants (leurs vecteurs normaux sont non colinéaires).

Définition 43.

Soit D une droite définie comme l'intersection de deux plans. Le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{array}\right.$$

est un système d'équation cartésienne de D.

Exemple 44.

1. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ définis par $\mathcal{P} : x - 2y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2x + y - z - 3 = 0$. Préciser, si c'est une droite, un point et un vecteur directeur et en déduire une représentation paramétrique.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de l'espace passant par $A(1, 2, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.