BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 4

— 14 décembre 2024—

Calculs.

1. (a) Un tirage correspond à une 8−liste sans répétition de l'ensemble $[\![1,20]\!]$.
   Il y a donc $\boxed{\dfrac{20!}{(20-8)!}=\dfrac{20!}{12!}\text{ tirages possibles}}$.

   (b) Une façon d'empiler les feuilles est une permutation de l'ensemble des 10 feuilles.
   Il y a donc $\boxed{10!\text{ façons d'empiler ces 10 feuilles}}$.

   (c) Choisir un tel tirage revient à :
   - choisir 3 jetons rouges parmi les 8 jetons rouges : $\binom{8}{3}$ possibilités.
   - choisir 4 jetons blancs parmi les 10 jetons blancs : $\binom{10}{4}$ possibilités.

   Au total, il y a $\binom{8}{3}\binom{10}{4}=\dfrac{8!10!}{3!5!4!6!}$ possibilités.
   $\boxed{\text{Il y a donc }\dfrac{8!10!}{3!5!4!6!}\text{ tels tirages}}$.

   (d) Choisir une telle main revient à :
   - choisir 2 cœurs dans l'ensemble des 8 cœurs : il y a $\binom{8}{2}$ possibilités
   - choisir 3 cartes dans l'ensemble des 24 cartes qui ne sont pas des cœurs : il y a $\binom{24}{3}$ possibilités.

   Au total, il y a $\binom{8}{2}\binom{24}{3}=\dfrac{8!}{2!8!}.\dfrac{24!}{21!3!}$ possibilités.
   Ainsi, il y a $\boxed{\dfrac{8!24!}{2!8!21!3!}\text{ mains contenant exactement 2 cœurs}}$.

   (e) Choisir un tel triplet revient à choisir un sous-ensemble 3 éléments de l'ensemble $[\![1,10]\!]$. Ensuite, il y a une seule manière de les ordonner (le plus petit est a, le plus grand est c).
   Il y a donc $\boxed{\binom{10}{3}=\dfrac{10!}{3!7!}\text{ triplets }(a,b,c)\text{ d'entiers tels que }1\leqslant a<b<c\leqslant 10}$

2.

$$(S)\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\iff}\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&2y&-&3z&=&2\\ &&y&+&2z&=&1\\ &&\alpha y&+&z&=&\lambda-2\end{array}\right.$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3-\alpha L_2}{\iff}\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&+&2y&-&3z&=&2\\ &&y&+&2z&=&1\\ &&&&(1-2\alpha)z&=&\lambda-2-\alpha\end{array}\right.$$

Ce système est échelonné. Son rang dépend de la valeur de α.

- Si $\alpha=\dfrac{1}{2}$: Le système est de rang 2. Il y a une équation de compatibilité qui est $0=\lambda-\dfrac{5}{2}$ (3ème ligne du système).
  - Si $\lambda\neq\dfrac{5}{2}$, la condition de compatibilité n'est pas satisfaite.
    $\boxed{\text{Donc l'ensemble des solutions est }\emptyset}$.
  - Si $\lambda=\dfrac{5}{2}$, la condition de compatibilité est satisfaite. Les solutions s'expriment en fonction d'un paramètre, par exemple z.
    $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est }\{(7z,1-2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}}$.
- Si $\alpha\neq\dfrac{1}{2}$: Le système est de rang 3. Il est de Cramer (il admet une unique solution).

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est }\left\{\left(\dfrac{-14-7\alpha+7\lambda}{1-2\alpha},\dfrac{5-2\lambda}{1-2\alpha},\dfrac{\lambda-2-\alpha}{1-2\alpha}\right)\right\}}$.

Exercice 1

1. Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre linéaire sous forme non-résolue. On sait la résoudre sur les intervalles où l'équation peut être mise sous forme résolue, en divisant par $x(x-1)$. Donc on sait la résoudre sur les intervalles $\boxed{]-\infty, 0[,\ ]0,1[, \text{ et }]1,+\infty[}$.

2. On pose $\boxed{a=-1,\ b=1}$ et on vérifie que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\},\ \dfrac{1}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

3. On en déduit que $x \mapsto -\ln|x| + \ln|x-1|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$ sur $]1,+\infty[$.
Or, $\forall x \in]0,+\infty[,\ x>0$ et $x-1>0$ donc
$\boxed{x \mapsto -\ln x + \ln(x-1) \text{ est une primitive de } x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)} \text{ sur }]1,+\infty[}$.

4. Sur $]1,+\infty[$, (E) est équivalent à l'équation sous forme résolue : $y' + \dfrac{1}{x(x-1)}y = \dfrac{1+x}{x(x-1)}$.
• Grâce à la question précédente, on trouve l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, $(H) : y' + \dfrac{1}{x(x-1)}y = 0$. C'est :
$$S_H = \left\{ x \in]1,+\infty[\mapsto A\frac{x}{x-1},\ A \in \mathbb{R} \right\}.$$
• Ensuite, on trouve une solution particulière de (E) par la méthode de la variation de la constante.
On obtient $x \mapsto \left(-\dfrac{1}{x} + \ln x\right)\dfrac{x}{x-1}$.
• On en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $]1,+\infty[$:
$$\boxed{S = \left\{ x \in]1,+\infty[\mapsto A\frac{x}{x-1} + \left(-\frac{1}{x} + \ln x\right)\frac{x}{x-1},\ A \in \mathbb{R} \right\}}.$$

Exercice 2

1. **Informatique**

(a)
```python
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(1,n+1):
        u = (5*u-2)/(u+2)
    return u
```

(b) Il y a deux rédactions possibles.
```python
def somme(n):
    u = 3
    s = u
    for i in range(1,n+1):
        u = (5*u-2)/(u+2)
        s = s + u
    return s
```
```python
def somme(n):
    s = 0
    for i in range(n+1):
        s = s + somme(i)
    return s
```

2. **Retour aux mathématiques...**

(a) $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}}$.

(b) f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathcal{D}$, donc f est dérivable sur $\mathcal{D}$, et $\boxed{\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \dfrac{12}{(x+2)^2}}$.

(c) D'après l'expression de la dérivée, $\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]-\infty,-2[$ et sur $]-2,+\infty[$.

(d) $f(2) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$. Donc, $\boxed{f([2,+\infty[) = [2,5[}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :
$$\mathcal{P}_n : \text{" le terme } u_n \text{ existe et } u_n \geq 2\text{"}.$$
• D'après l'énoncé, $u_0 = 3$ donc u_0 existe et $u_0 \geq 2$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Donc $u_n \in [2,+\infty[$. Donc $u_n \in \mathcal{D}$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus, $f(u_n) \in f([2,+\infty[) = [2,5[$ d'après la question précédente. Donc $f(u_n) \geq 2$. Donc $u_{n+1} \geq 2$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
• Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien définie et à termes supérieurs à } 2}$.

4. $u_0 = 3$ et $u_1 = \dfrac{5u_0 - 2}{u_0 + 2} = \dfrac{12}{5} < u_0$. On conjecture que la suite est décroissante.
   $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) : "u_n > u_{n+1}"$.
   - $u_0 > u_1$ donc $H(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie.
     Donc, $u_n > u_{n+1}$
     Donc, $f(u_n) > f(u_{n+1})$ car f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$
     Donc, $u_{n+1} > u_{n+2}$
     Donc, $H(n+1)$ soit vraie.
   - Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.

   Donc, $\boxed{\text{la suite est décroissante}}$.

5. La suite u est décroissante et minorée par 2. Par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge}}$.

6. On va appliquer le théorème du point fixe.
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$,
   - la suite u est convergente,
   - la fonction f est continue sur $[2, +\infty[$

   Par le théorème du point fixe, $\ell = f(\ell)$.
   Or, $\ell = f(\ell) \iff \ell(\ell + 2) = 5\ell - 2 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \iff \ell = 1$ ou $\ell = 2$.
   Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2$ donc $\ell \geq 2$. Donc, $\boxed{\ell = 2}$.

Exercice 3

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, définie sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions sommes d'une solution quelconque de l'équation homogène associée et d'une solution particulière. Après calculs, on trouve :

$$\boxed{\left\{x \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x} - ax^2 - 2,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

2. (a) z est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et,par formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables,
$$\boxed{\begin{array}{c}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(x) = 2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x)\end{array}}.$$

   (b) f est solution de (E)

$$\begin{array}{ll} \text{donc} & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x)) - x^2 f(x) = x^2 \\ \text{donc} & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(x) - z(x) = x^2 \end{array}$$

   Ainsi, $\boxed{z \text{ est solution de } (E') : y'' - y = x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

   (c) À la première question, nous avons résolu une équation différentielle. Si $a = 1$, l'équation résolue est (E'). On en déduit l'ensemble des solutions de (E') sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{S = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto Ae^x + Be^{-x} - x^2 - 2,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

   (d) D'après les question précédentes, on en déduit l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{S = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{Ae^x + Be^{-x} - x^2 - 2}{x^2},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

Exercice 4

1. (a) D'après la définition de la suite (v_n), $\boxed{v_0 = 3 \text{ et } v_1 = 3.}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rll} v_{n+2} & = u_{n+3} + 2u_{n+2} & \text{par définition de la suite } (v_n) \\ & = 3u_{n+1} - 2u_n + 2u_{n+2} & \text{par définition de la suite } (u_n) \\ & = 3u_{n+1} - 2u_n + 2(v_{n+1} - 2u_{n+1}) & \text{par définition de la suite } (v_n) \\ & = -u_{n+1} - 2u_n + 2v_{n+1} & \\ & = -(u_{n+1} + 2u_n) + 2v_{n+1} & \\ & = -v_n + 2v_{n+1} & \text{par définition de la suite } (v_n) \end{array}$$

   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = -v_n + 2v_{n+1}\ .}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence $\mathcal{P}_n$: "$v_n = 3$".
• $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies d'après la question 1.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies.
Donc, $v_n = 3$ et $v_{n+1} = 3$.
Donc, $v_{n+2} = -v_n + 2v_{n+1} = -3 + 2.3 = 3$.
Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie.
• Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3$.
$\boxed{\text{Donc la suite } (v_n) \text{ est constante, égale à 3}}$.

(d) On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 = u_{n+1} + 2u_n$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 3}$.
Donc (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

(e) On exprime u_n en fonction de n (voir cours). On obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 3.(-2)^n}$.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}(1 + 3(-2)^k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 1 + 3\sum_{k=0}^{n}(-2)^k \text{ somme géométrique de raison } -2 \neq 1 \\
&= (n+1) + 3\frac{(-2)^{n+1} - 1}{-2-1} \\
&= n + 1 - ((-2)^{n+1} - 1) \\
&= n + 2 - (-2)^{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = n + 2 - (-2)^{n+1}}$.

2. (a) $w_0 = u_0 - (-2)^0 = 1$? $w_1 = u_1 - (-2) = 0$ et $w_2 = u_2 - 4 = -1$. Donc, $\boxed{w_2 - 2w_1 + w_0 = 0.}$

(b) Montrons ceci par récurrence :
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0\text{"}.$$

• Nous avons montré à la question précédente que $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
w_{n+3} - 2w_{n+2} + w_{n+1} &= (u_{n+3} - (-2)^{n+3}) - 2(u_{n+2} - (-2)^{n+2}) + (u_{n+1} - (-2)^{n+1}) \\
&= (3u_{n+1} - 2u_n) - (-2)^{n+3} - 2u_{n+2} + 2(-2)^{n+2} + u_{n+1} - (-2)^{n+1} \\
&= -2[u_{n+2} - (-2)^{n+2} - 2(u_{n+1} - (-2)^{n+1}) + (u_n - (-2)^n)] \\
&= -2(w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n) \\
&= 0 \text{ car } w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0 \text{ d'après } \mathcal{P}_n
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
• Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0}$$

(c) D'après la question précédente, (w_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $w_0 = 1$ et $w_1 = 0$. On sait donc l'exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On obtient, après calculs : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 1 - n}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - (-2)^n$, on en déduit $u_n = w_n + (-2)^n$. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - n + (-2)^n}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - k + (-2)^k\right) \\
&= (n+1) - \sum_{k=0}^{n} k + \sum k = 0^n(-2)^k (\text{somme des termes d'une suite géométrique de raison } -2 \neq 1) \\
&= (n+1) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 - (-2)} \\
&= (n+1)(1 - \frac{n}{2}) + \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_n = \frac{(n+1)(2-n)}{2} + \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}}$.