BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°4

Samedi 14 décembre 2024

– Dénombrement, Suites, EDL, Systèmes –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions, devront être <u>soulignés</u> ou $\boxed{\textbf{encadrés}}$.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Calculs.

1. Répondre aux questions suivantes. On justifiera brièvement les réponses. On donnera les réponses sous forme de factorielles.
   (a) Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire successivement et sans remise 8 boules de cette urne. Combien y a t-il de tirages possibles ?
   (b) On empile 10 feuilles d'exercices. Combien y a t-il de façons de les empiler ?
   (c) Une urne contient 8 jetons rouges, 10 jetons blancs et 5 jetons bleus. On tire simultanément 7 jetons. Combien y a t-il de tirages contenant exactement 3 jetons rouges et 4 jetons blancs ?
   (d) Dans un jeu de 32 cartes, combien y a t-il de mains de 5 cartes contenant exactement deux cartes de cœurs ?
   (e) Combien y a t-il de triplets (a, b, c) d'entiers tels que $1 \leqslant a < b < c \leqslant 10$?
2. Soit $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Résoudre le système :

$$(S)\quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & (\alpha+2)y & - & 2z & = & \lambda \end{array} \right.$$

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : x(x-1)y' + y = 1 + x$$

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ? Sur quel(s) intervalle(s) sait-on la résoudre ?
2. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\},\ \frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

3. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$ sur $]1, +\infty[$.
4. Résoudre (E) sur $]1, +\infty[$.

Exercice 2.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}$.

On définit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5x-2}{x+2}$.

1. **Informatique.**
   (a) Écrire une fonction `suite` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.
   (b) Écrire une fonction `somme` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la valeur de $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

2. Étude de la fonction f.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? On note $\mathscr{D}$ cet ensemble.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer sa dérivée.
   (c) Déterminer les variations de f de D puis $f([2,+\infty[)$.
3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2$.
4. Déterminer la monotonie de la suite u.
5. En déduire qu'elle converge. On notera ℓ sa limite.
6. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 3.

L'objectif de cet exercice est de résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation suivante :

$$(\mathrm{E}) : x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = x^2.$$

1. **Question préliminaire.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation différentielle $y'' - \alpha y = \alpha^2 x^2$.
   On recherchera une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 2.
2. Soit f une solution de (E). Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $z(x) = x^2 f(x)$.
   (a) Justifier que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer z' et z'' à l'aide de f, f' et f''.
   (b) Montrer que z est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants que l'on déterminera. On note (E$'$) cette équation.
   (c) Résoudre (E$'$) sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.

Soit la suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de trois réels u_0, u_1 et u_2, et par la relation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

1. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 4$, $u_1 = -5$ et $u_2 = 13$.
   Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} + 2u_n$.
   (a) Calculer v_0 et v_1.
   (b) Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et v_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer par récurrence que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à 3.
   Attention à bien poser la propriété de récurrence.
   (d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   (e) Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$, $u_1 = -2$ et $u_2 = 3$.
   Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - (-2)^n$.
   (a) Vérifier que $w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$.
   (b) * Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 0$.
   (c) Exprimer w_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$.