

Exercice 1 Soit $\mathcal{D} : x + 3y - 4 = 0$ et $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4y - 16 = 0$.

1. Donner un point et un vecteur directeur de \mathcal{D} .

Correction $A(4, 0)$ et $B(1, 1)$ sont des points de \mathcal{D} . Donc, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3, 1)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} .

2. Déterminer le centre et le rayon de \mathcal{C} .

Correction Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$x^2 + y^2 + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 - 4 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 20$$

Donc, \mathcal{C} est le cercle de centre $C(0, -2)$ et de rayon $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

3. Etudier $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$.

Correction Soit $M(x, y) \in \mathcal{D}$. Donc, $x = 4 - 3y$.

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (4 - 3y)^2 + y^2 + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow -20y + 10y^2 = 0 \Leftrightarrow 10y(y - 2) = 0$$

Donc $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \{(4, 0), (-2, 2)\}$.

Exercice 2

1. Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{D} .

Correction \mathcal{D} est la droite passant par $A(-1, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2, -1)$. Donc,

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x + 1 & 2 \\ y - 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -x - 1 - 2y + 2 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de \mathcal{D} est $x + 2y - 1 = 0$.

2. Soit $\mathcal{D}' : y = 7x - 1$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D}' .

Correction $A(0, -1)$ et $B(1, 6)$ sont des points de \mathcal{D}' donc $\overrightarrow{AB} = (1, 7)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D}' .

$$\text{D'où } \mathcal{D}' : \begin{cases} x = t \\ y = 7t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère les deux points $A(a, 0)$ et $B(0, 1)$. On considère la droite \mathcal{D} passant par A et B et le cercle \mathcal{C} contenant A, B et O . Les tangentes à \mathcal{C} en A et O se coupent en un point D .

1. Déterminer une équation de la droite (AB) .

Correction $\overrightarrow{AB} = (-a, 1)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} .

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - a & -a \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow x - a + ay = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D} : x + ay - a = 0$.

2. Donner une équation du cercle \mathcal{C} passant par l'origine, A et B .

Correction On cherche le centre $C(x_C, y_C)$ et le rayon R du cercle \mathcal{C} . Il y a deux méthodes possibles.

- **Méthode 1** : C est équidistant de A , B et O .

$$\begin{aligned} \|AC\| = \|BC\| = \|OC\| &\Leftrightarrow (x_C - a)^2 + y_C^2 = x_C^2 + (y_C - 1)^2 = x_C^2 + y_C^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2ax_C + a^2 = 0 \\ -2y_C + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{a}{2} \\ y_C = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $C \left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

Puis, $R = \|OC\| = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2}$.

- **Méthode 2** : On remarque que \vec{OA} et \vec{OB} sont orthogonaux : $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = a \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.
Donc, $[AB]$ est le diamètre du cercle \mathcal{C} .

Donc, C est le centre du segment $[AB]$: $x_C = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$ et $y_C = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

Puis, $R = \frac{\|\vec{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{(-a)^2 + 1}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{2}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C} passant par O et de la tangente à \mathcal{C} passant par A .

Correction $\vec{OC} = \left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2} \right)$ est un vecteur normal à la droite tangente à \mathcal{C} passant par O .

On la note \mathcal{D}_O .

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D}_O &\Leftrightarrow \vec{OM} \cdot \vec{OC} = 0 \\ &\Leftrightarrow x \frac{a}{2} + y \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{D}_O : ax + y = 0$.

$\vec{AC} = \left(-\frac{a}{2}, \frac{1}{2} \right)$ est un vecteur normal à la droite tangente à \mathcal{C} passant par A .

On la note \mathcal{D}_A .

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{D}_A &\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AC} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a) \frac{-a}{2} + y \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{D}_A : ax - y - a^2 = 0$.

4. Déterminer les coordonnées de D . Quelle courbe décrit D ?

Correction D est le point d'intersection de \mathcal{D}_O et de \mathcal{D}_A .

$$\begin{cases} ax_D + y_D = 0 \\ ax_D - y_D - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -\frac{y_D}{a} \\ 2y_D + a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{a}{2} \\ y_D = -\frac{a^2}{2} \end{cases}$$

On remarque que $y_D = -2x_D^2$ donc D parcourt une parabole.

Exercice 4 Soient A et B deux points du plan.

1. Déterminer l'ensemble des points M tel que $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$.

Correction Notons $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ les points fixés. Soit $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 &\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (x_A + x_B)x + x_A x_B + y^2 - (y_A + y_B)y + y_A y_B = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - \frac{(x_A + x_B)^2}{4} + x_A x_B + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - \frac{(y_A + y_B)^2}{4} + y_A y_B = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = \frac{(x_A + x_B)^2}{4} - x_A x_B + \frac{(y_A + y_B)^2}{4} - y_A y_B \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = \frac{(x_A - x_B)^2}{4} + \frac{(y_A - y_B)^2}{4} \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 = \left(\frac{\|AB\|}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

On reconnaît le cercle de centre $C\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\|AB\|}{2}$.

Le centre est le milieu du segment $[AB]$ et le diamètre est $\|AB\|$.

2. A quel résultat de géométrie cela correspond-il ?

Correction On retrouve le théorème de Pythagore.

Exercice 5 Soient $A(0, 3, -1)$, $B(1, 1, 0)$ et $C(1, -1, 2)$.

1. Justifier que ces trois points permettent de définir un unique plan \mathcal{P} .

Correction On va regarder si ces points permettent de définir des vecteurs non colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1, -4, 3)$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC} = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La seule solution du système est $(0, 0)$ donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les points A , B et C définissent bien un unique plan dont \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont des vecteurs directeurs.

2. Donner une représentation paramétrique de \mathcal{P} .

Correction Le plan passe par $A(0, 3, -1)$ et a pour vecteurs directeurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} donc

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = t + t' \\ y = -2t - 4t' + 3 \\ z = t + 3t' - 1 \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2.$$

3. Donner une équation cartésienne de \mathcal{P} .

Correction On cherche un vecteur normal au plan. Donc, on cherche $\vec{n} = (a, b, c)$ tel que $\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle = \langle \overrightarrow{AC}, \vec{n} \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{AC}, \vec{n} \rangle = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ a - 4b + 3c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ -2b + 2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = c \end{cases} \end{aligned}$$

On peut prendre $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

Le plan \mathcal{P} passe par $A(0, 3, -1)$ et a pour vecteur normal \vec{n} donc

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow x + (y - 3) + (z + 1) = 0 \end{aligned}$$

donc une équation cartésienne de \mathcal{P} est $x + y + z - 2 = 0$.

Exercice 6 On considère les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1)$.

- Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P} passant par A , B , C .

Correction Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$ sont non colinéaires et forment des vecteurs directeurs du plan \mathcal{P} .

Le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$ est un vecteur normal à \mathcal{P} .

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1) + y + z = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0$.

- Déterminer le projeté orthogonal du point O (origine du repère) sur \mathcal{P} .

Correction Soit $H(x, y, z)$ le projeté orthogonal de O sur \mathcal{P} . On a donc

$$\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

- En déduire la distance de O à \mathcal{P} .

Correction Par définition, $d(O, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 7 Soit $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

Soit \mathcal{D} la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

Soit \mathcal{D}' la droite passant par B et de vecteur directeur \vec{v} .

- Combien y a-t-il de droites orthogonales à \mathcal{D} et à \mathcal{D}' ?
- Déterminer celle qui passe par $C(0, 2, 4)$. On la notera Δ .

Correction

- Il y en a une infinité.
- On va déterminer un vecteur directeur de Δ . C'est donc un vecteur orthogonal à \mathcal{D} et à \mathcal{D}' .

On cherche $\vec{n} = (a, b, c)$ tel que

$$\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0 \\ \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut prendre $\vec{n} = (0, 1, -1)$.

Une représentation paramétrique de Δ est donc $\begin{cases} x = 0 \\ t = 2 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$