Chapitre 17 : Polynômes réels

Table des matières

1 Polynômes, règles de calculs **2**
1.1 Ensemble des polynômes . . . 2
1.2 Opérations sur l'ensemble des polynômes . . . 2
1.3 Identification . . . 3
1.4 Règles de calculs . . . 3
1.5 Degré d'un polynôme . . . 3
1.6 Polynôme dérivé . . . 4

2 Racines et Factorisation **5**
2.1 Existence de racines . . . 5
2.2 Factorisation . . . 5

3 Racines multiples **6**
3.1 Définition . . . 6
3.2 Caractérisation . . . 6

1 Polynômes, règles de calculs

1.1 Ensemble des polynômes

Définition 1.

On appelle fonction polynomiale une fonction f pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k$ le polynôme associé à f.

On note $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

- P est le polynôme nul lorsque tous ces coefficients sont nuls.
  $P = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
- P est un polynôme constant lorsque $P = a_0$.
  $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0$.
- P est un monôme s'il admet un seul terme.
  $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $P = a_k \mathbf{X}^k$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_k x^k$.

1.2 Opérations sur l'ensemble des polynômes

Remarque 3. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

Pour un entier $m \geq n$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ en définissant $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_m = 0$.

Définition 4.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Soit $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On définit le polynôme $P + Q$ par $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)\mathbf{X}^k$.

On définit le polynôme $\lambda.P$ par $\lambda.P = \sum_{k=0}^{n} \lambda.a_k \mathbf{X}^k$.

Définition 5.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$.
On définit le polynôme PQ par $(PQ)(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X}).Q(\mathbf{X})$.
On définit le polynôme $Q \circ P$ par $(Q \circ P)(\mathbf{X}) = Q[P(\mathbf{X})]$.

Exemple 6. On pose $P = 2\mathbf{X}^2 + 1$, $Q = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X} + 1$. Déterminer $P + 3Q$, $P.Q$, $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1.3 Identification

Théorème 7 (Identification)**.**

- Un polynôme est le polynôme nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.
- Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.

Exemple 8. Soit $P = a\mathbf{X}^2 + b\mathbf{X} + c$.

1. A quelle condition a-t-on $P(-\mathbf{X}) = P(\mathbf{X})$?
2. A quelle condition a-t-on $P(-\mathbf{X}) = -P(\mathbf{X})$?

1.4 Règles de calculs

Théorème 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$(\mathbf{X} + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \mathbf{X}^k$$

$$\mathbf{X}^n - a^n = (\mathbf{X} - a).\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \mathbf{X}^k\right)$$

Exemple 10. Développer $(\mathbf{X} - 1)^5$.

Exemple 11. Factoriser $\mathbf{X}^5 - 1$.

1.5 Degré d'un polynôme

Définition 12.

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

- On appelle degré de P le réel $\deg(P) = \max\,\{k \in [\![0, n]\!]\ ,\ a_k \neq 0\}$.
- Par convention, $\deg(0) = -\infty$.
- Le coefficient $a_{\deg(P)}$ est appelé coefficient dominant de P.

Exemple 13. Parmi les polynômes suivants :

$$A = \mathbf{X}^3 + 3\mathbf{X}^2 + 5\mathbf{X} + 2\ ,\ B = 3\mathbf{X}^{10} + (2 + \mathbf{i})\mathbf{X}^5 + 3\mathbf{X}\ ,\ C = \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 1\ ,\ D = \mathbf{i}\mathbf{X}^5\ ,\ E = 3\ ,\ F = 0$$

- Quels sont ceux qui appartiennent à $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$?
- Quels sont ceux de degré 3 ?
- Quels sont ceux dont le coefficient dominant vaut 1 ?
- Quel sont ceux dont le coefficient constant est pair ?

Théorème 14.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$.

1. $\deg(P+Q) \leq \max\left(\deg(P), \deg(Q)\right)$.
2. Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P),\deg(Q)\big)$
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Exemple 15. Déterminer deux polynômes P et Q tels que $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

1.6 Polynôme dérivé

Définition 16.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.
On appelle polynôme dérivé de P le polynôme défini par

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k \mathbf{X}^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \mathbf{X}^k$$

Remarque 17. La fonction polynomiale associée à P' est la dérivée de la fonction polynomiale associée à P.

Exemple 18. Déterminer le polynôme dérivé de $P = 5\mathbf{X}^4 + \mathbf{X}^2 + 3$.

Théorème 19.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

1. Si $\deg(P) \geq 1,\ \deg(P') = \deg(P) - 1$.
2. Si $\deg(P) \leq 0$ alors $\deg(P') = -\infty$.

Théorème 20.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

1. $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. $(PQ)' = P' \times Q + P \times Q'$.
3. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (Q^k)' = kQ'Q^{k-1}$.

Définition 21 (Hors programme)**.**

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$. On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ P^{(m)} = (P^{(m-1)})' \end{cases}$$

Exemple 22. Déterminer les polynômes dérivés successifs de $P = 5\mathbf{X}^4 + \mathbf{X}^2 + 3$.

Exemple 23. Soit $P = a_0 + a_1\mathbf{X} + a_2\mathbf{X}^2 + a_3\mathbf{X}^3 \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.
Déterminer $P'(0)$, $P^{(2)}(0)$ et $P^{(3)}(0)$.

2 Racines et Factorisation

2.1 Existence de racines

Définition 24.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Théorème 25.

Tout polynôme réel non nul de degré impair admet au moins une racine réelle.

2.2 Factorisation

Théorème 26.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

1. α est une racine de P, c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$.
2. Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ tel que $P = (\mathbf{X} - \alpha)Q$.

Remarque 27. Pour déterminer Q, on détermine son degré puis ses coefficients par identification.

Exemple 28. Proposer une factorisation de $P = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 - 5\mathbf{X} + 3$.

Théorème 29.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ et soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ des racines **distinctes** de P.

$$\exists\, Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}], \quad P = \prod_{k=1}^{s} (\mathbf{X} - \alpha_k) \times Q$$

Remarque 30. Pour déterminer Q, on détermine son degré puis ses coefficients par identification.

Exemple 31. Factoriser le polynôme $P = \mathbf{X}^4 - 1$.

Théorème 32.

1. Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
2. Soit P un polynôme de degré au plus n. Si P admet $n + 1$ racines distinctes alors $P = 0$.
3. Si un polynôme admet une infinité de racines alors c'est le polynôme nul.

Exemple 33.

Théorème 34.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admettant n racines **distinctes** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$P = a_n \prod_{k=1}^{n} (\mathbf{X} - \alpha_k)$$

3 Racines multiples

3.1 Définition

Définition 35.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P. Soit $r \in \mathbb{N}$.
On dit que α est une racine de multiplicité r lorsque

$$\exists\, Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \text{ tel que } P = (\mathbf{X} - \alpha)^r Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0.$$

1. Pour $r = 1$, on parle de racine simple.
2. Pour $r = 2$, on parle de racine double.
3. Pour $r \geq 2$, on parle de racine multiple.

Remarque 36. La multiplicité d'une racine α d'un polynôme P est la plus grande puissance de $\mathbf{X} - \alpha$ qu'on peut mettre en facteur dans P.

Exemple 37. Déterminer les racines des polynômes suivants et dire si elles sont simples ou multiples.

1. $P = (\mathbf{X} + 2)(\mathbf{X} - 3)^2(\mathbf{X} + 1)^5$
2. $P = \mathbf{X}^5 - 2\mathbf{X}^4 + \mathbf{X}^3$

3.2 Caractérisation

Théorème 38.

Soient $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

1. α est racine multiple de P
2. $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.

Exemple 39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $P = 1 + \mathbf{X} + \dfrac{\mathbf{X}^2}{2!} + \dfrac{\mathbf{X}^3}{3!}$. Montrer que P n'a que des racines simples.

Théorème 40 (Hors-Programme)**.**

Soient $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :

1. α est racine de P de multiplicité r
2. $P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) = 0, \ldots,\ P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.