Exercice 1 Soit $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -3$, $m \neq 0$.
Calculer la seconde solution des équations suivantes.

1. $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est solution.
2. $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est solution.
3. $(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est solution.

Exercice 2

1. Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes
   (a) $x^2 - 6x + 9 = 0$.
   (b) $x^2 + 4x - 12 = 0$.
2. En utilisant la relation coefficients-solutions, résoudre les équations suivantes.
   (a) $x^2 - 13x + 42 = 0$.
   (b) $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Exercice 3 Pour les polynômes proposés, calculer PQ, $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1. $P = 2\mathbf{X}^2 - 1$ et $Q = \mathbf{X}$.
2. $P = \mathbf{X}^2 + 3$ et $Q = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X} + 1$.
3. $P = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 1$ et $Q = \mathbf{X} - 1$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants :

$$P = (\mathbf{X}+1)^5 - \mathbf{X}^5,\ Q = (1-\mathbf{X}^3)^5 + (\mathbf{X}^5-1)^3,\ R = (\mathbf{X}-1)^n - (\mathbf{X}+1)^n.$$

Exercice 5

1. Proposer deux polynômes P et Q de degré 1 tels que
$$P(1) = 0,\ P(2) = 1,\ Q(2) = 0,\ Q(1) = 1$$
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Proposer deux polynômes P_a et P_b de degré 1 tels que
$$P_a(a) = 1,\ P_a(b) = 0,\ P_b(a) = 0,\ P_b(b) = 1$$

Exercice 6 On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$P_0 = 1,\ P_1 = \mathbf{X} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2\mathbf{X}P_{n+1} - P_n$$

1. Déterminer P_2 et P_3.
2. Conjecturer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n et le coefficient dominant de P_n.
3. Démontrer votre conjecture.

Exercice 7 Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ tel que $P(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X}+1)$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0)$.
2. En déduire que le polynôme $P - P(0)$ est le polynôme nul.
3. En déduire les valeurs possibles de P.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère le polynôme $P = (\mathbf{X}+1)^{2n+1} - \mathbf{X}^{2n+1} - 1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P = (\mathbf{X}^2 + \mathbf{X})Q$.
2. Quel est le degré de Q ?
3. (-1) est-il une racine multiple de P ?

Exercice 9 Soit $n \geq 2$. Soit $P = n\mathbf{X}^{n+2} - (4n+1)\mathbf{X}^{n+1} + 4(n+1)\mathbf{X}^n - 4\mathbf{X}^{n-1}$.

1. Justifier que 2 est une racine de P.
2. Est-ce une racine multiple de P ?.

Exercice 10 [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (1+\mathbf{X})^{2n}$.

1. Développer P. En déduire le coefficient devant le monôme $\mathbf{X}^n$.
2. En écrivant $P = (1+\mathbf{X})^n.(1+\mathbf{X})^n$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 11 [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (1+\mathbf{X})^n$.

1. Développer P.
2. Déterminer deux expressions de P'.
3. En déduire que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \; k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$