Chapitre 18 : Suites réelles, partie 2

Table des matières

1 Ensembles des suites réelles

Définition 1.

On appelle suite réelle toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
On note souvent une suite sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

1.1 Opérations sur l'ensemble des suites

Définition 2.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On définit la suite somme $u+v$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n$.
- On définit la suite $\lambda.u$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda.u)_n = \lambda \times u_n$.
- On définit la suite produit $u.v$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ (u.v)_n = u_n \times v_n$.

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stable par chacune de ces opérations.

Exemple 3. Proposer deux suites non nulles dont le produit donne la suite nulle.

1.2 Suites bornées et suites monotones

2 Limite d'une suite

2.1 Opérations sur les limites

2.2 Limite finie

Définition 4.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la suite u admet une limite finie ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon\big)$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On dit que la suite converge vers ℓ.

Remarque 5.

- A partir du rang n_0, les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$.
- Le rang n_0 dépend de ε. Plus ε est petit, plus n_0 est grand.

Théorème 6.

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Si une suite admet une limite finie alors cette limite est unique.
3. Si une suite converge alors elle est bornée.

Théorème 7.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$.

2.3 Limite infinie

Définition 8.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite u admet une limite infinie $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A\big)$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On dit que la suite diverge.

Définition 9.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite u admet une limite infinie $-\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A\big)$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. On dit que la suite diverge.

Théorème 10.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

2.4 Limites et inégalités

3 Suites extraites et Suites adjacentes

3.1 Suites extraites

Théorème 11.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle **convergente**, de limite ℓ.

1. La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ.
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Définition 12.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On appelle suite extraite de rangs pairs la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$.
On appelle suite extraite de rangs impairs la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n+1}$.

Théorème 13.

Soit u une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. La suite u converge vers ℓ (resp. $-\infty$ ou $+\infty$) si, et seulement si, les suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs convergent vers ℓ (resp. $-\infty$ ou $+\infty$).
2. Si les suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs ne convergent pas vers la même limite alors la suite u est divergente.

Exemple 14. Déterminer la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos(n\pi)$.

Exemple 15. Déterminer la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

3.2 Suites adjacentes

Définition 16.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On dit que ces suites sont adjacentes lorsque :

1. la suite u est croissante,
2. la suite v est décroissante,
3. la suite $v - u$ converge vers 0.

Exemple 17. Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Théorème 18.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes (avec u croissante et v décroissante).

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$
2. les suites u et v convergent et ont la même limite ℓ.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$

4 Suites équivalentes

4.1 Définition

Définition 19.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles avec la suite v non nulle à partir d'un certain rang.
On dit que la suite u est équivalente la suite v lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

On lit "u_n est équivalent de v_n en $+\infty$" et on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemple 20.

- $n^5 + 3n^3 - 7 \underset{+\infty}{\sim} n^5$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ de degré d alors $P(n) \underset{+\infty}{\sim} a_d n^d$.
- $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$.
- Lorsqu'une suite u converge vers $\ell \neq 0$, on peut écrire $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$.

Remarque 21. C'est une relation symétrique : si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

Théorème 22.

Soient u et v deux suites réelles, v non nulle à partir d'un certain rang (APCR).
On a équivalence entre

1. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
2. Il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ et $u_n = v_n(1 + w_n)$ APCR

Exemple 23.

1. Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n) + n$.
2. Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n + \sqrt{n}$.

4.2 Opérations sur les équivalents

Théorème 24.

Soient u, v, u' et v' quatre suites réelles non nulles à partir d'un certain rang.

1. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$.
2. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $u'_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$ alors $u_n \times u'_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \times v'_n$.
3. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda.u_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda.v_n$.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
5. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $u'_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$ alors $\dfrac{u_n}{u'_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{v'_n}$.
6. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Exemple 25. Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}$.

Exemple 26. Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\ln(n)+n}{n+\sqrt{n}}$.

4.3 Equivalents usuels

Théorème 27.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non nulle à partir d'un certain rang telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

$$\cos(u_n) \underset{n+\infty}{\sim} 1 \quad \sin(u_n) \underset{n+\infty}{\sim} u_n \quad \tan(u_n) \underset{n+\infty}{\sim} u_n \quad \mathbf{e}^{u_n} - 1 \underset{n+\infty}{\sim} u_n \quad \ln(1+u_n) \underset{n+\infty}{\sim} u_n$$

$$\cos(u_n) - 1 \underset{n+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2} \quad \sqrt{1+u_n} - 1 \underset{n+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$$

Exemple 28. Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n.\sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$.

4.4 Equivalents et limites

Théorème 29.

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et et si v converge vers ℓ alors u converge aussi vers ℓ.

Exemple 30. Déterminer la limite des suites proposées.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ u_n = \dfrac{2n^2+5n-1}{(3n-1)(1-n)}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\mathbf{e}^{\frac{2}{n}} - 1}$.

Exemple 31. Déterminer la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.