Corrigé du devoir maison n° 5

— —

Exercice 1 - Calculs.

1. $P = 2\mathbb{X}^2(\mathbf{X}+1)(\mathbf{X}+\frac{1}{2})$.
2. $Q = (\mathbf{X}-1)^2(\mathbf{X}^2+\mathbf{X}+1) = (\mathbf{X}-1)^2(\mathbf{X}-\mathbf{j})(\mathbf{X}-\bar{\mathbf{j}})$ (où on a noté $\mathbf{j} = \mathbf{e}^{2\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$).
3. $R = (\mathbf{X}-1)(\mathbf{X}+1)(\mathbf{X}^2+1) = (\mathbf{X}-1)(\mathbf{X}+1)(\mathbf{X}-\mathbf{i})(\mathbf{X}+\mathbf{i})$

Exercice 2 - Géométrie.

1. (a) Une représentation paramétrique de D est $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

   (b) Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à P_1. Donc,

$$\begin{aligned} C(x,y,z) \in P_1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1).-2+(y+1).1+(z-1)1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x+y+z+2 = 0 \end{aligned}$$

   Une équation cartésienne de P_1 est $\boxed{-2x+y+z+2=0}$.

2. On note $N(0,2,1)$ et P le plan de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t+2t' \\ y = -t+t' \\ z = 2-t-t' \end{cases}, (t,t') \in \mathbb{R}^2$.

   (a) $\begin{cases} x = 1+t+2t' \\ y = -t+t' \\ z = 2-t-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t+2t' \\ x+y = 1+3t' \\ x+z = 3+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t+2t' \\ x+y = 1+3t' \\ x+y-3(x+z) = -8 \end{cases}$.

   Une équation cartésienne de P est $\boxed{-2x+y-3z+8=0}$.

   (b) On remarque que le vecteur $\overrightarrow{n} = (-2,1,-3)$ est un vecteur normal à P.
   Le point $H(x,y,z)$ vérifie le système suivant $\begin{cases} H \in P \\ \overrightarrow{NH} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} H \in P \\ \overrightarrow{NH} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont colinéaires} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y-3z+8 = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{NH} = \lambda.\overrightarrow{n} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y-3z+8 = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y-2, z-1) = \lambda(-2,1,-3) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y,z) = (-2\lambda, 2+\lambda, 1-3\lambda) \\ 4\lambda+2+\lambda-3(1-3\lambda)+8 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x,y,z) = (-2\lambda, 2+\lambda, 1-3\lambda) \\ 14\lambda+7 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc, $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ et $\boxed{H\left(1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)}$.

   (c) On sait que la distance de N à P est la norme du vecteur $\overrightarrow{HN}$.

$$||\overrightarrow{HN}||^2 = (1-0)^2 + \left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-1\right)^2 = \frac{14}{4}$$

   Donc, $\boxed{d(N,P) = \dfrac{\sqrt{14}}{2}}$.

Exercice 3 - Polynômes.

1. D'après la définition des P_n, $P_3 = \mathbf{X}P_2 - P1 = \mathbf{X}^2 - 1$, et $P_4 = \mathbf{X}P_3 - P2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}^2 - 1) - \mathbf{X}$.
   Donc $\boxed{P_3 = \mathbf{X}^2 - 1 \text{ et } P_4 = \mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}}$.

2. Nous allons prouver ceci par récurrence à deux pas.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété de récurrence :
   $\mathcal{Q}_n$: " P_n est de degré $n-1$ et son coefficient dominant est 1".
   • P_1 est unitaire de degré 0, et P_2 est unitaire de degré 1. Donc $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont vraies.
   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ soient vraies.
   Puisque P_{n+1} est unitaire de degré n (d'après $\mathcal{Q}_{n+1}$), il existe un polynômes R de degré $\leqslant n-1$, tel que $P_{n+1} = \mathbf{X}^n + R$.
   De plus, par définition de la suite (P_n) :
   $P_{n+2} = \mathbf{X}P_{n+1} - P_n$. Donc $P_{n+2} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^n + R) - P_n = \mathbf{X}^{n+1} + \underbrace{\mathbf{X}R - P_n}_{\text{degré } \leqslant n (*)}$.
   ((*) car d'après $\mathcal{Q}_n$, P_n est de degré $n-1$.)
   On en déduit que P_{n+2} est unitaire, de degré $n+1$. Donc $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie.
   • Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \text{ de degré } n-1, \text{ et son coefficient dominant est } 1}$.

3. Remarquons tout d'abord que l'expression en fonction de θ est bien définie pour $\theta \in]0, \pi[$ car $\sin(\theta) \neq 0$ (le dénominateur de la fraction est non-nul).
   Soit $\theta \in]0, \pi[$. Nous allons montrer cette égalité par récurrence à deux pas.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété de récurrence :
   $\mathcal{Q}_n$: "$P_n(2\cos(\theta)) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta))}$".
   • $P_1(2\cos(\theta)) = 1 = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$ donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.
   $P_2(2\cos(\theta)) = 2\cos\theta$, or $\frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$. Donc $P_2(2\cos(\theta)) = \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}$. Donc $\mathcal{Q}_2$ est vraie.
   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ soient vraies.
   Puisque par définition, $P_{n+2} = \mathbf{X}P_{n+1} - P_n$, on a :
   $P_{n+2}(2\cos\theta) = (2\cos\theta)P_{n+1}(2\cos\theta) - P_n(2\cos\theta)$. Donc, d'après $\mathcal{Q}_n$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$:
   $P_{n+2}(2\cos\theta) = (2\cos\theta)\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta))} - \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta))} = \dfrac{2\cos\theta(\sin(n\theta)\cos\theta + \sin\theta\cos(n\theta)) - \sin(n\theta)}{\sin\theta}$.
   On factorise au numérateur puis on applique des formules de trigonométrie (angle double) :
   $P_{n+2}(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)(2\cos^2\theta - 1) + (2\cos\theta\sin\theta)\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{\sin(n\theta)\cos(2\theta) + \sin(2\theta)\cos(n\theta)}{\sin(\theta)}$.
   On reconnaît $\sin((n+2)\theta)$ au numérateur (encore une formule de trigonométrie), d'où :
   $P_{n+2}(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+2)\theta}{\sin\theta}$. Donc $\mathcal{Q}_{n+2}$ est vraie.
   • Ainsi, d'après le principe de récurrence,
   $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ P_n(2\cos(\theta)) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta))}}$.

4.
$$\begin{aligned}
\sin(n\theta) = 0 &\iff \sin(n\theta) = \sin(0) \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} : n\theta = k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \tfrac{k\pi}{n}
\end{aligned}$$

   Or $0 < \theta < \pi$ donc les seules valeurs de k possibles sont celles vérifiant $0\frac{k\pi}{n} < \pi$, c'est à dire, en multipliant par $\frac{n}{\pi} > 0$: $0 < k < n$. Puisque k est un entier, cela est équivalent à $k \in [\![1, n-1]\!]$. Ainsi :

$$\boxed{\sin(n\theta) = 0 \iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] : \theta = \tfrac{k\pi}{n}}$$

5. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$ fixé quelconque. Pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $2\cos\theta \in]-2, 2[$, donc nous pouvons chercher des racines de P_n dans $]-2, 2[$ sous la forme $2\cos\theta$, avec $\theta \in]0, \pi[$.

$$\begin{aligned}
P_n(2\cos\theta) = 0 &\iff \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta))} = 0 \\
&\iff \sin(n\theta) = 0 \\
&\iff \exists k \in [\![1, n-1]\!] : \theta = \tfrac{k\pi}{n} \text{ d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

   Par ailleurs, la fonction $\theta \mapsto 2\cos(\theta)$ est injective sur $]0, \pi[$ (car elle est strictement décroissante sur cet intervalle). Donc, puisque pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, les $\frac{k\pi}{n}$ sont des réels de $]0, \pi[$ deux à deux distincts, on en

déduit que les nombres $2\cos(\frac{k\pi}{n})$ sont deux à deux distincts quand k parcourt $[\![1, n-1]\!]$.
Ainsi, nous avons trouvé $n-1$ racines deux à deux distinctes de P_n, et ces racines appartiennent à l'intervalle $]-2,2[$. Or P_n est de degré $n-1$ donc il a au plus $n-1$ racines. Il n'y a donc pas d'autre racine.

$\boxed{\text{On en déduit que } P_n \text{ a exactement } n-1 \text{ racines deux à deux distinctes dans l'intervalle }]-2,2[}$.

L'ensemble des racines de P_n est : $\boxed{\{2\cos(\frac{k\pi}{n}), k \in [\![1, n-1]\!]\}}$.

6. Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. On connaît les racines de P_n et son coefficient dominant. D'où $\boxed{P_n = \prod_{k=1}^{n-1} (\mathbf{X} - 2\cos(\frac{k\pi}{n}))}$.

7. Soit un entier $n \geqslant 2$. D'après le résultat de la question 3, $P_n(2\cos\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$. Donc, d'après la factorisation précédente :

$$P_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \prod_{k=1}^{n-1}(2\cos\theta - 2\cos(\frac{k\pi}{n})) = \prod_{k=1}^{n-1} 2(\cos\theta - \cos(\frac{k\pi}{n})).$$

On en déduit : $\boxed{\dfrac{\sin(n\theta))}{\sin(\theta)} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$.

Exercice 4 -

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -28 & 20 \\ -5 & -10 & 8 \\ -14 & -32 & 24 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. (a) <u>1ère méthode</u> : Soit $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ fixé quelconque. L'étude du système $PX = B$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, montre que le système est de Cramer. Donc P est inversible. On obtient son inverse en terminant la résolution du système. On trouve :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}}$$

(b) <u>2ème méthode</u> : Calculons :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -8 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

On remarque (en considérant les termes non-diagonaux de P^2 que $\boxed{P^2 = 2P - I_3}$.
On en déduit que $2P - P^2 = I_3$, d'où, en factorisant à droite ou à gauche par P : $(2I_3 - P)P = P(2I_3 - P) = I_3$. $\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible, d'inverse } 2I_3 - P}$. On retrouve bien la même expression de P^{-1} obtenue précédemment.

2. (a) Calculons $N = P - I_3$ et N^2. On obtient :

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } N^2 = 0_3 \text{ donc } \forall k \in \mathbb{N},\ k \geq 2\ N^k = 0_3}$$

(b) Par définition de N, on a $P = I_3 + N$. Puisque N et I_3 commutent, on peut appliquer la formule d binôme pour calculer les puissances de P. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.

$$\begin{aligned} P^n &= (N+I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} N^k + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0_3} \right) \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 \\ &= I_3 + nN \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P^n = I_3 + nN}$.

(c) Si on pose $n = -1$ dans formule précédente, on obtient la matrice $I_3 - N$. Vérifions que $I_3 - N$ est l'inverse de P. Pour cela, calculons $(I_3 - N)P$ et $P(I_3 - N)$:
$(I_3 - N)P = (I_3 - N)(I_3 + N) = I_3 - N^2 = I_3$ et $P(I_3 - N) = (I_3 + N)(I_3 - N) = I_3 - N^2 = I_3$.
Donc $P^{-1} = I_3 - N$ et la formule est encore vraie pour $n = -1$.

3. On calcule D, par exemple en calculant $(P^{-1}A)P$. On obtient :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

4. On obtient par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D^0 = I_3}$$

5. Puisque $D = P^{-1}AP$, on en déduit en multipliant cette égalité à gauche par P puis à droite par P^{-1} : $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : \text{"} A^n = PD^nP^{-1} \text{"}.$$

• $\mathcal{P}_0$ est vraie car $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors $A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})PDP^{-1}$ (d'après $\mathcal{P}_n$ et la question précédente).
Donc $A^{n+1} = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1}$ (par associativité du produit matriciel).
Ainsi, $A^{n+1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
• Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculons A^n à l'aide de la formule précédente et l'expression de D^n. On obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} -3-4.2^n & -4-12.2^n & 4+8.2^n \\ -3-2^n & -4-3.2^n & 4+2.2^n \\ -6-4.2^n & -8-12.2^n & 8+8.2^n \end{pmatrix} \text{ et } A^0 = I_3}$$

8. (a) On remarque que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n}$.

(b) On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0}$. Ce résultat s'établit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(c) Puisqu'on connait l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n = -7-16.2^n \\ v_n = -7-4.2^n \\ w_n = -14-16.2^n \end{cases}}$$