Devoir maison n°5
— Géométrie, Polynômes, Suites —

Exercice 1 - Calculs.

Factoriser les polynômes suivants.

1. $P = 2\mathbf{X}^4 + 3\mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2$.
2. $Q = \mathbf{X}^4 - \mathbf{X}^3 - \mathbf{X} + 1$.
3. $R = \mathbf{X}^4 - 1$.

Exercice 2 - Géométrie.

1. On note $M(1,-1,1)$ et D la droite passant par $A(1,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-2,1,1)$.
   (a) Donner une représentation paramétrique de la droite D.
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan P_1, passant par M et orthogonal à D.
2. On note $N(0,2,1)$ et P le plan de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = -t + t' \\ z = 2 - t - t' \end{cases}$ $,(t,t') \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Déterminer un point du plan P et deux vecteurs directeurs.
   (b) Donner une équation cartésienne du plan P.
   (c) Déterminer les coordonnées de H, le projeté orthogonal de N sur P.
   (d) En déduire la distance de N à P.

Exercice 3 - Polynômes.

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes à coefficients réels définie par :

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = \mathbf{X} \\ \forall n \in [\![3,+\infty[\![,\ P_n = \mathbf{X}P_{n-1} - P_{n-2} \end{cases}$$

1. Déterminer les polynômes P_3 et P_4.
2. Déterminer, en le justifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n. Préciser son coefficient dominant.
3. Soit $\theta \in]0,\pi[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P_n(2\cos(\theta)) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta))}.$$
4. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Soit $\theta \in]0;\pi[$. Montrer que
$$\sin(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in [\![0,n-1]\!] \text{ tel que } \theta = \frac{k\pi}{n}$$
5. En déduire que pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$, le polynôme P_n a exactement $n-1$ racines deux à deux distinctes dans l'intervalle $]-2,2[$ et les calculer.
6. Factoriser P_n dans $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$, pour tout $n \in [\![2,+\infty[\![$.
7. Établir à partir de ce qui précède que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$\frac{\sin(n\theta))}{\sin(\theta)} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos(\theta) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

Exercice 4 - Puissances de matrices.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -28 & 20 \\ -5 & -10 & 8 \\ -14 & -32 & 24 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. **Deux méthodes pour calculer P^{-1}.**
   (a) <u>1ère méthode</u> : Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   (b) <u>2ème méthode</u> : Calculer P^2. Exprimer P^2 en fonction de P et I_3 (matrice identité d'ordre 3). En déduire que P est inversible et déterminer son inverse.
2. **Calcul des puissances de** P.
   (a) On note $N = P - I_3$. Calculer N et N^2.
   (b) Exprimer P en fonction de N et en déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de P^n en fonction de N et de I_3.
   (c) La formule est-elle encore vraie pour $n = -1$?
3. **Calcul des puissances de** A.
   (a) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer la matrice D.
   (b) Déterminer D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire A^n en fonction de D, P, P^{-1} et n.
   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer la matrice A^n en fonction de n.
4. **Application.** On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -11u_n - 28v_n + 20w_n \\ v_{n+1} = -5u_n - 10v_n + 8w_n \\ w_{n+1} = -14u_n - 32v_n + 24w_n \end{cases}$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

   Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre X_n, X_{n+1} et A.
   (b) En déduire X_n en fonction de A, X_0 et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.