Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. C'est la *suite harmonique*.

1. Montrer que la suite H est croissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite n'est pas convergente et que $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$$
La suite H est croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Supposons que la suite H converge.
Alors la suite extraite de rangs pairs $(H_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite.
Par passage à la limite dans l'inéquation de la question 2, on obtient : $0 \geq \frac{1}{2}$.
C'est absurde. On en déduit que H ne converge pas.
De plus, comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$ et donc $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 2 [*] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en conclure ?

Correction

1. On va vérifier les trois points de la définition.
   - On étudie la monotonie de $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0$$
   Donc, la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   - On étudie la monotonie de $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0$$
   Donc, la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   - On étudie la limite de la différence.
   $$\lim_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = 0$$
   Donc, $\lim_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

Les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien adjacentes.

2. On en déduit qu'elles sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite.
   On a donc la suite extraite de rangs pairs $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la suite extraite de rangs impairs $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers la même limite.
   Donc, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 3 Déterminer des équivalents pour les suites proposées.

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2n^2+3n-6.$
2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 4n^3+2n+\cos(n)$
3. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = 3+\dfrac{1}{n}$
4. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}.$
5. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+2n+10}.$
6. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (n^2+n+1)^3$
7. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2024}$
8. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$
9. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = n\sin\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$
10. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$
11. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\mathbf{e}^{\frac{3}{n^2}}-1}$
12. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n}$

Correction

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^2.$
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 4n^3.$
3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3.$
4. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{3}{n^2}\left(1+\dfrac{5}{3n}\right)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^2}.$
5. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = n\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{10}{n^2}}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$
6. $n^2+n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$ donc, par passage à la puissance, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^6.$
7. $1+\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ donc, par passage à la puissance, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$
8. Attention, la puissance n'est pas constante donc la règle précédente ne s'applique pas.
   Soit $n\in\mathbb{N}$. $u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right).$
   Or, $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n.\dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ donc, par composée de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathbf{e}$. Donc, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbf{e}.$
9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.\dfrac{2}{n^2}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}.$

10. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^2+1}{n^2+2} = \dfrac{n^2+2-1}{n^2+2} = 1 - \dfrac{1}{n^2+2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+2} = 0$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n^2+2}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n^2}$.
11. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
    $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0$ donc $\mathbf{e}^{\frac{3}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^2}$.
    Par quotient , $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n^2}}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}$.
12. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)\right)$.
    Or, $n \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n.\dfrac{2}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 2$ donc, par composée de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathbf{e}^2$. Donc, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbf{e}^2$.

<u>Exercice</u> 4 Déterminer des équivalents pour les suites proposées et en déduire leur limite .

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^3 + n\sin(n^{10} + n^7)}{n + \ln n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2(\ln n)^4 - n^3(\ln n)^2 + (-1)^n n^2 e^{-n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}\ln n}{\sqrt{n+2}}$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(2n^{15}) + 15n^2$
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+3n+6}{n^2+1}\right)$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(3n^{10} + 1)$
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ u_n = \ln\left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}\right)$
8. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n^2 \ln\left(1 + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
9. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \exp(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) - 1$
10. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\ln(n^3+1)}{n^2 - n + 2}$
11. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n^3+n+1}{n+\sqrt{n}} e^{-n}$
12. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^3+5n+2}{3^n + 3(-1)^n}$
13. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^{2n} + 2^{3n}$
14. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{2n} - \sqrt{\mathbf{e}^n}$
15. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{-n}}{\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{-n}}$
16. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(2 - \mathbf{e}^{\frac{1}{n}})$
17. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+n+1}\right)$
18. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sqrt{1+\mathbf{e}^{-n}} - 1}{\mathbf{e}^{-2n}}$
19. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (2n)^{\frac{1}{n}} - 1$
20. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{\mathbf{e}^{\frac{1}{n}}} - 1$

Correction

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^3\ln(n)^2$.
3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
4. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 15n^2$.
5. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n}$.
6. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 10\ln(n)$.
7. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
8. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
9. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
10. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3\ln(n)}{n^2}$.
11. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\mathbf{e}^{-n}$.
12. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{3^n}$.
13. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 9^n$.
14. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbf{e}^{2n}$.
15. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
16. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{n}$.
17. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(2)$.
18. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{e}^n}{2}$.
19. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.
20. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

Exercice 5 Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n\mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2+u_n}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1+x}{2+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que
   $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
3. Etudier la monotonie de la suite u.
4. En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.
5. Que se passe-t-il si $u_0 = 1$?

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et
   $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{2+x-(1+x)}{(2+x)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} \geq 0$.
   Donc, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. On raisonne par récurrence avec $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)$: "u_n existe et $0 \leq u_n \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$".

   I Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $\sqrt{5} \geq 2$ donc $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \geq 0$ donc $H(0)$ est vraie.

   H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie également.
   $H(n)$ est vraie donc $0 \leq u_n \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   Donc, $u_n \neq -2$ donc $f(u_n)$ existe. Donc, u_{n+1} existe.
   De plus, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
   Donc, $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
   Donc, $H(n+1)$ est vraie.

   C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
3. On raisonne de nouveau par récurrence. avec $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)$: "$u_n \leq u_{n+1}$".

I Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}$ donc $H(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie également.
$H(n)$ est vraie donc $u_n \leq u_{n+1}$.
Donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ car f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Donc, $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
Donc, $H(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, la suite u est croissante.

4. La suite u est croissante et majorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge.
De plus, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}-+$ donc, par le théorème du point fixe, la suite u converge vers une solution de l'équation $\ell = \dfrac{1+\ell}{2+\ell}$.

$$\ell = \frac{1+\ell}{2+\ell} \Leftrightarrow \ell(2+\ell) = 1+\ell \Leftrightarrow \ell^2+\ell-1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \ell = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Or, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc la suite converge vers $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5. On reprend par récurrence à ceci près que l'encadrement proposé n'est plus vrai.

- On commence par la monotonie avec $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)$: "$u_n \geq u_{n+1}$".

  I Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{2}{3}$ donc $H(0)$ est vraie.

  H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie également.
  $H(n)$ est vraie donc $u_n \geq u_{n+1}$.
  Donc $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ car f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
  Donc, $u_{n+1} \geq u_{n+2}$.
  Donc, $H(n+1)$ est vraie.

  C Par le principe de récurrence, la suite u est décroissante.

- On va donc seulement montrer que la suite est minorée.
  On raisonne par récurrence avec $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)$: "u_n existe et $0 \leq u_n$".

  I Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ donc $H(0)$ est vraie.

  H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie. Montrons que $H(n+1)$ est vraie également.
  $H(n)$ est vraie donc $0 \leq u_n$.
  Donc, $u_n \neq -2$ donc $f(u_n)$ existe. Donc, u_{n+1} existe.
  De plus, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $f(0) \leq f(u_n)$.
  Donc, $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1}$
  Donc, $H(n+1)$ est vraie.

  C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $0 \leq u_n$.

- La suite u est décroissante et minorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge.
  De plus, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}-+$ donc, par le théorème du point fixe, la suite u converge vers une solution de l'équation $\ell = \dfrac{1+\ell}{2+\ell}$.

  $$\ell = \frac{1+\ell}{2+\ell} \Leftrightarrow \ell(2+\ell) = 1+\ell \Leftrightarrow \ell^2+\ell-1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } \ell = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

  Or, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc la suite converge vers $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.

   (b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On la note x_n.
2. Déterminer x_1 et x_2.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geq \dfrac{1}{2}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$.
   En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k - 1$.
   (a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puisque c'est une fonction polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} > 0$.
   Donc, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est également continue sur $\mathbb{R}_+$.
   Par le théorème de la bijection, f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[f_n(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[$.
   (b) $0 \in [-1, +\infty[$ donc 0 admet un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}_+$. On a donc $f_n(x_n) = 0$.
2. $f_1 : x \mapsto x - 1$ donc $x_1 = 1$.
   $f_2 : x \mapsto x^2 + x - 1$ donc $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - 1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   Donc, $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq f_n(x_n)$. Par monotonie de la fonction f_n, on obtient $\dfrac{1}{2} \leq x_n$.
4. On a $f_n(x_n) = 0$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.
   De plus, $f_n(x_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{n+1}^k - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} x_{n+1}^k - x_{n+1}^{n+1} - 1 = f_{n+1}(x_{n+1}) - x_{n+1}^{n+1} = -x_{n+1}^{n+1} < 0$.
   Donc, $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$. Par monotonie de la fonction f_n, on obtient $x_{n+1} \leq x_n$.
   Donc, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. La suite est décroissantes et minorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge.

Exercice 7 On considère la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{1+3u_n}.$$

. On pose : $f : x \mapsto \dfrac{3}{1+3x}$.

1. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$ et construire les premiers termes de la suite.
2. On pose $I = [0, 3]$. Montrer que I est stable par f
   (c'est à dire que $f(I) \subset I$, ou encore $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.)
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 3$.
4. Déterminer les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+$ (c'est à dire les réels x vérifiant $f \circ f(x) = x$).
5. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies contraires.
6. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes.
7. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{-9}{(1+3x)^2} < 0$.
   Donc, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   $u_1 = \dfrac{3}{1+3u_0} = \dfrac{3}{4}$, $u_2 = \dfrac{3}{1+3u_1} = \dfrac{12}{13}$ et $u_3 = \dfrac{3}{1+3u_2} = \dfrac{39}{49}$.
2. La fonction f est décroissante sur $[0,3]$ donc $\forall x \in [0,3],\ f(3) \leq f(x) \leq f(0)$.
   Donc, $\forall x \in [0,3],\ 0 \leq \dfrac{3}{10} \leq f(x) \leq 3$.
   Donc, I est bien stable par f.
3. On raisonne par récurrence. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 3$.
   I u_0 existe et $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vrai.
   H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai.
   $u_n \in \mathbb{R}_+$ donc $f(u_n)$ existe. Donc, u_{n+1} existe.
   De plus, par stabilité, $f(u_n) \in [0,3]$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 3$. Donc, $P(n+1)$ est vrai.
   C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 3$.
4. On doit d'abord justifier que la composée est possible. $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ donc $f \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (f \circ f)(x) = f[f(x)] = \frac{3}{1+3f(x)} = \frac{3}{1+3\frac{3}{1+3x}} = \frac{3+9x}{10+3x}$$
   Donc, $(f \circ f)(\ell) = \ell \Leftrightarrow 3 + 9\ell = 10\ell + 3\ell^2 \Leftrightarrow 3\ell^2 + \ell - 3 = 0 \Leftrightarrow \ell = \dfrac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}$.
5. On va raisonner par récurrence. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ P(n) :$ "$u_{2(n+1)} \leq u_{2n}$".
   I $u_0 = 1$ et $u_2 = \dfrac{12}{13} \leq u_0$ donc $P(0)$ est vrai.
   H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai.
   On a $u_{2(n+1)} \leq u_{2n}$. Par croissance de $f \circ f$, $(f \circ f)(u_{2(n+1)}) \leq (f \circ f)(u_{2n})$ donc $u_{2n+4} \leq u_{2n+2}$. Donc, $P(n+1)$ est vrai.
   C On en déduit que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   On montre, de même, que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi décroissante.
6. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et minorées. Par le théorème de la limite monotone, elles sont convergentes.
   De plus, la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, les deux suites convergent vers un point fixe de $f \circ f$.
   De plus, par passage à la limite dans l'encadrement de la question 3, on obtient que lueur limite doit appartenir à $[0,3]$. Finalement, seul $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}$ est possible donc
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}$.
7. Puisque les deux suites extraites convergent vers la même limite, on en déduit que la suite u converge elle aussi vers cette limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{6}$.