Chapitre 19 : Limites et continuité de fonctions réelles

Table des matières

Définition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
On note $\overline{I}$ l'union de I et des extrémités de I.

Exemple 2. $\overline{[1,2[} = [1,2]$ et $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

1 Limites d'une fonction

1.1 Limites en $-\infty$ ou en $+\infty$

Définition 3 (Limites finies en $+\infty$.)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ lorsque

Définition 4 (Limites infinies en $+\infty$.)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que la fonction f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ lorsque

- On dit que la fonction f diverge vers $-\infty$ en $+\infty$ lorsque

Définition 5 (Limites en $-\infty$.).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que la fonction f <u>admet une limite finie ℓ en $-\infty$</u> lorsque
- On dit que la fonction f <u>diverge vers $+\infty$ en $-\infty$</u> lorsque
- On dit que la fonction f <u>diverge vers $-\infty$ en $-\infty$</u> lorsque

1.2 Limites en un point

Définition 6.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f <u>admet une limite finie ℓ en a</u> lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

<u>**Remarque 7.**</u> Le réel η dépend du réel ε vu l'ordre des quantificateurs.

Définition 8.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
On dit que la fonction f <u>admet une limite infinie $+\infty$ en a</u> lorsque

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$$

On dit que la fonction f <u>admet une limite infinie $-\infty$ en a</u> lorsque

$$\forall M < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq M$$

1.3 Limites à gauche et à droite en un point

Définition 9.

Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
On dit que f admet une limite finie ℓ à gauche en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a - \eta \leq x \leq a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On dit que f admet une limite finie ℓ à droite en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ a \leq x \leq a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemple 10. Soit $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ la fonction partie entière.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \lfloor x \rfloor = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \lfloor x \rfloor = 0$$

Remarque 11.

1. Ces limites à gauche et à droite sont rencontrées lorsqu'on étudie une fonction qui a des valeurs interdites, pour lesquelles $D_f = I \setminus \{a\}$.
2. Les limites à gauche et à droite en a peuvent être différentes de la valeur que la fonction prend en a.

1.4 Quelques propriétés de la limite

Théorème 12.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f admet une limite en $a \in \overline{I}$ (resp. limite à gauche ou à droite) alors cette limite est unique.
On la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$).

Théorème 13.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f est définie en a,
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \text{ et } f(a) = \ell$$
2. Si f n'est pas définie en a,
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$$

Exemple 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}$. Montrer que la fonction f n'admet pas de limite en 0.

1.5 Propriété séquentielle de la limite

Exemple 15. Déterminer la limite suivante $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Théorème 16 (Composition de limites)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

Théorème 17.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans I.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$ alors la fonction f n'admet pas de limite en a.

Exemple 18. Démontrer que la fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

2 Opérations sur les limites

Théorème 19.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant des limites en a.
La fonction $f + g$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) =$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Forme Ind.**
ℓ	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	**Forme Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Théorème 20.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant des limites en a.
La fonction $f.g$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} fg(x) =$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**Forme Ind.**	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$
0	**Forme Ind.**	0	0	0	**Forme Ind.**
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**Forme Ind.**	$+\infty$	$+\infty$

Théorème 21.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant des limites en a.
La fonction $\dfrac{f}{g}$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0^-	0^+	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**
$\ell < 0$	0^+	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^-
0^-	0^+	0^+	**F.I.**	**F.I.**	0^-	0^-
0^+	0^-	0^-	**F.I.**	**F.I.**	0^+	0^+
$\ell > 0$	0^-	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0^+
$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Théorème 22 (Limite d'une composée)**.**

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.
Soit $a \in \overline{I}$. Soit $b \in \overline{J}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \ell$

Exemple 23. Déterminer la limite de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ en $+\infty$.

3 Propriétés de la limite

3.1 Limites et inégalités

Théorème 24.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant une limite en $a \in \mathbb{R}$.

1. Si au voisinage de a, $f(x) > 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$.
2. Si au voisinage de a, $f(x) < g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ alors au voisinage de a, $f > 0$.

Remarque 25. L'inégalité devient large par passage à la limite.

$$\forall x > 0,\ \frac{1}{x} > 0 \text{ et pourtant } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = 0.$$

3.2 Théorèmes d'encadrement, de minoration et de majoration

Théorème 26.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que, au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors g admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Théorème 27.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
On suppose que

1. Au voisinage de a, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.
2. Les fonctions f et g admettent la même limite **finie** en a et $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors, la fonction h admet une limite en a et $\lim_{x \to a} h(x) = \ell$.

3.3 Théorème de la limite monotone

Théorème 28.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction **croissante**.

1. f admet une limite à droite en a.
2. f admet une limite à gauche en b.

Ces limites sont finies ou infinies.

Théorème 29.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction **décroissante**.

1. f admet une limite à droite en a
2. f admet une limite à gauche en b.

Ces limites sont finies ou infinies.

3.4 Croissances comparées

Théorème 30.

Soit $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\mathbf{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \qquad \lim_{x \mapsto -\infty} x^\beta \mathbf{e}^{\alpha x} = 0.$$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x \mapsto 0^+} x^\beta \ln(x)^\alpha = 0.$$

4 Fonctions équivalentes

4.1 Définition

Définition 31.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec g non nulle au voisinage de a.
On dit que <u>f est équivalente en g en a</u> lorsque la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet une limite en a égale à 1.

On note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

Exemple 32. Déterminer la limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+5}{x^2}$. En déduire un équivalent de x^2-2x+5 en $+\infty$.

Exemple 33.

- Soit $f(x) = x^2 + x + \ln(x)$. Déterminer des équivalents aux bords de l'intervalle de définition.
- Soit $g(x) = \sqrt{x + x^2}$. Déterminer des équivalents aux bords de l'ensemble de définition.

Remarque 34. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} \ell$.

4.2 Propriétés des fonctions équivalentes

Théorème 35.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ ne s'annulant pas au voisinage de a.

1. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si g admet une limite (finie ou infinie) en a alors f admet la même limite en a.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a.

4.3 Opérations compatibles avec les équivalents

Théorème 36.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Soient f, g, h, $k : I \to \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a.

1. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.
2. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$.
3. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.
4. Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{k}$.
5. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Exemple 37. Déterminer un équivalent simple de $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x}$ en 0 et en $+\infty$.

Remarque 38. On ne peut pas additionner des équivalents.

4.4 Equivalents usuels

Théorème 39.

- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

- $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$
- $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

Exemple 40.

1. Déterminer un équivalent en 0 de $g(x) = \sqrt{\ln(1+x)}$
2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^3+1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exemple 41. Déterminer un équivalent en 0 de $h(x) = \ln(1+x) + x$.

4.5 Substitution dans les équivalents

Théorème 42.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a.
Soit $h : J \to \mathbb{R}$ avec $h(J) \subset I$.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} h(x) = a$ alors $f(h(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(h(x))$.

Exemple 43.
1. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\sin(\mathbf{e}^{-x})$.
2. Déterminer un équivalent en 0 de $\tan(4x^3 + x)$.

Exemple 44. Déterminer la limite lorsque x tend vers 1 de $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2+x-2}$.

Théorème 45.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$.

Exemple 46.
1. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\cos(\mathbf{e}^{-n}) - 1$.
2. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $n^{\frac{1}{n}} - 1$.

Exemple 47. Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

5 Continuité locale d'une fonction

5.1 Continuité en un point

Définition 48.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
La fonction f est <u>continue en a</u> lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Lorsque f n'admet pas de limite finie en a, on dit que f est <u>discontinue en a</u>.

Exemple 49. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$
Cette fonction est-elle continue en 0 ?

Exemple 50. Les fonctions usuelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

5.2 Continuité à gauche et à droite

Définition 51.

Soit I et intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
La fonction f est continue à gauche en a lorsque $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
La fonction f est continue à droite en a lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Exemple 52. Etudier la continuité en 1 de la fonction partie entière.

Théorème 53.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

Exemple 54. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{\frac{1}{x}} \text{ pour } x < 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \\ \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \end{cases}$

Cette fonction est-elle continue en 0 ?

5.3 Continuité et suites

Théorème 55.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue en a.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans I telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Exemple 56. Soit u la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \tan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
Déterminer la nature de la suite u.

Théorème 57 (Théorème du point fixe)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in I \\ f \text{ est continue sur } I, \end{cases}$, alors ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$.

5.4 Prolongement par continuité en un point

Définition 58.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $I =]a, b[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que <u>f est prolongeable par continuité en a</u> lorsque f admet une limite à droite finie en a, notée ℓ.
Le prolongement est définie de la façon suivante :

$$\tilde{f}_a : \left\{ \begin{array}{l} [a, b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ pour } x \in]a, b[\\ \ell \text{ pour } x = a \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On dit que <u>f est prolongeable par continuité en b</u> lorsque f admet une limite à gauche finie en b, notée ℓ'.
Le prolongement est définie de la façon suivante :

$$\tilde{f}_b : \left\{ \begin{array}{l}]a, b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ pour } x \in]a, b[\\ \ell' \text{ pour } x = b \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Exemple 59. Soit f la définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Peut-on prolonger cette fonction par continuité en 0 ?

Exemple 60. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_-^*$ par $f(x) = \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}}$. Peut-on prolonger cette fonction par continuité en 0 ?

Exemple 61. Montrer que la fonction $x \mapsto x^x$ peut être prolongée par continuité en 0.