BCPST

1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°5

Samedi 25 janvier 2025

– Polynômes, Géométrie et Matrices –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions, devront être soulignées ou encadrées.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 – Calculs.

1. Soit $P = \mathbf{X}^4 - 4\mathbf{X} + 3$.
   (a) Montrer que P a une racine multiple.
   (b) En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ puis dans $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définie par

$$P_0(\mathbf{X}) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\mathbf{X}) = (2n+1)\mathbf{X}P_n(\mathbf{X}) - (\mathbf{X}^2+1)P_n'(\mathbf{X})$$

   (a) Déterminer P_1, P_2 et P_3.
   (b) Conjecturer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n et le coefficient dominant de P_n.
   (c) Démontrer votre conjecture.

Exercice 2 – Géométrie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des points $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$(x+y+z+1) + n(x-5y+4z-2) = 0$$

On note également $\mathscr{P}_\infty$ l'ensemble défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+s-t \\ y &=& -1+s+3t \\ z &=& -1+s+4t \end{array}\right. ,(s,t) \in \mathbb{R}^2$$

1. Quelle est la nature de $\mathscr{P}_\infty$? Donner un ensemble de points et de vecteurs permettant de le définir.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}_\infty$.
3. Démontrer que $\mathscr{D} = \mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_\infty$ est une droite dont on donnera une représentation paramétrique.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la nature de $\mathscr{P}_n$? Donner un ensemble de points et de vecteurs permettant de le définir.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}_n$.
6. Soit $A(1,2,3)$. Écrire un système dont le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}_\infty$ est solution.
   On ne cherchera pas à résoudre ce système.

Exercice 3 – Polynômes.

Dans cet exercice, on détermine l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient l'équation :

$$(E) : XP(X-1) = (X-2)P(X)$$

que l'on peut aussi écrire : $(E) : \forall x \in \mathbb{C},\ xP(x-1) = (x-2)P(x)$.

On admettra, sans le démontrer, le résultat suivant :

$$\forall (a,b,c,\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{N}^6,\quad X^a(X-1)^b(X-2)^c = X^\alpha(X-1)^\beta(X-2)^\gamma \iff \left\{\begin{array}{l} a=\alpha \\ b=\beta \\ c=\gamma \end{array}\right.$$

1. (a) Montrer que le polynôme nul est solution de (E).
   (b) Soient $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$. On pose $\mathrm{P} = \lambda \mathrm{X}^n(\mathrm{X}-1)^p$.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme P vérifie l'équation (E).
   (c) La réponse de la question précédente permet-elle de donner l'ensemble des solutions de l'équation (E) ? Si oui, donner cet ensemble. Si non, justifier.
2. (a) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ vérifiant (E). Soit α une racine de P.
      i. Si $\alpha \neq 0$, montrer que $\alpha - 1$ est racine de P.
      ii. En déduire que si P est un polynôme non-nul, il n'a pas de racine dans l'intervalle $]-\infty, 0[$.
      iii. Si $\alpha \neq 1$, montrer que $\alpha + 1$ est racine de P.
      iv. En déduire que si P est un polynôme non-nul, il n'a pas de racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$.
   (b) On suppose que P n'est pas le polynôme nul. Montrer, en utilisant les questions précédentes et en les complétant, que 0 et 1 sont les seules racines de P. Ne pas oublier que l'on considère des polynômes de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$.
   (c) En déduire la forme des polynômes vérifiant (E).
3. Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ qui vérifient l'équation (E).

Exercice 4 – Matrices.

On considère la suite récurrente linéaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 4,\ u_1 = 5,\ u_2 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 5u_{n+2} - 8u_{n+1} + 4u_n. \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de déterminer le terme général u_n en fonction de n.

1. **Informatique.**
   (a) Écrire une fonction python qui prend en entrée un entier n et qui calcule le terme u_n de cette suite.
   (b) Écrire une fonction python qui prend en entrée un entier n et qui calcule la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
   (c) On peut montrer que la suite (u_n) tend vers $-\infty$. Écrire une fonction python qui renvoie le premier entier n tel que $u_n < -1000$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne X_n défini par $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver une matrice M carrée d'ordre 3 à coefficients réels vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{X}_n$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer X_n en fonction de M, X_0 et n.
3. On introduit la matrice $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que P est inversible, d'inverse $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) Calculer la matrice $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{P}$. On doit trouver une matrice triangulaire supérieure.
4. (a) On pose $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que ces matrices commutent.
   (b) Sans démonstration, déterminer D^j, pour tout $j \in \mathbb{N}$.
   (c) Calculer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n.
5. (a) Exprimer M en fonction de P, P^{-1} et T.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer M^n en fonction de P, P^{-1}, T et n.
   On ne cherchera pas à exprimer M^n *sous la forme d'un tableau de nombres.*
6. Pour tout entier naturel n, en déduire l'expression de u_n en fonction de n.