Exercice 1 Déterminer les limites suivantes

1. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{x^5-x}{x^2-1}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = \mathbf{e}^x - 2x + 1$ en $+\infty$.
4. $f(x) = 3x\mathbf{e}^{-x^2}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
8. $f(x) = \cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{5x}$ en 0.
10. $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$.
11. $f(x) = \mathbf{e}^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{x+5}{x^2+1} = \dfrac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{x^5-x}{x^2-1} = x^3.\dfrac{1-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\mathbf{e}^x - 2x + 1 = \mathbf{e}^x\left(1 - 2\dfrac{x}{\mathbf{e}^x} + \dfrac{1}{\mathbf{e}^x}\right)$.
   Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathbf{e}^x} = 0$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $3x\mathbf{e}^{-x^2} = 3.\dfrac{-x^2\mathbf{e}^{-x^2}}{-x}$.
   Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathbf{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2\mathbf{e}^{-x^2} = 0$. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1} = \dfrac{1+\mathbf{e}^{-x}}{1-\mathbf{e}^{-x}}$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.
6. Il s'agit d'une forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$ où les deux termes tendent vers $+\infty$ avec la même vitesse. Aucune mise en facteur ne conviendra. On multiplie par la partie conjuguée.
   $\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} \times \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x} + \sqrt{x-1} = +\infty$. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}) = 0}$.
7. On applique la même méthode.
   $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) = 2$. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) = 1}$.
8. On utilise un encadrement de la fonction cosinus.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |\cos(5x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}| \leq \mathbf{e}^{-3x}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{-3x} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(5x)\mathbf{e}^{-3x} = 0}$.
9. $\dfrac{\sin(2x)}{5x} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{\sin(2x)}{2x}$. Or, $\lim\limits_{X\to0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$. Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = 1$.
   Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{5x} = \dfrac{2}{5}}$.
10. On va utiliser un encadrement de sin. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |\sin(x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|\dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}\right| \leq \dfrac{|x|}{x^2+1}$.
    Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin(x)}{x^2+1} = 0}$.
11. $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 \leq x-\sin(x) \Rightarrow \mathbf{e}^{x-1} \leq \mathbf{e}^{x-\sin(x)}$ par croissante sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.
    Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x-1} = +\infty$. Par minoration, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x-\sin(x)} = +\infty}$.

Exercice 2 *Limites et parties entières*

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\lfloor x \rfloor$.
   Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
   Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Correction

1. On va utiliser la caractérisation de la partie entière : $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
   Pour $x > 0$, cela donne $x(x-1) < x\lfloor x \rfloor \leq x^2$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x(x-1) = +\infty$.

   Par minoration, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x\lfloor x \rfloor = +\infty}$.

   Pour $x < 0$, cela donne $x(x-1) > x\lfloor x \rfloor \geq x^2$. Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$.

   Par minoration, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x\lfloor x \rfloor = +\infty}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$. Or, $\lim\limits_{x \to 0} 1 - x = 1$.

   Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1}$.

   Soit $x > 1$. $0 \leq \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Donc, la fonction f est nulle sur $]1;+\infty[$. D'où, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0}$.

Exercice 3 *Limites et fonction sinus*

1. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Montrer que la fonction f n'admet pas de limite en 0.
3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Déterminer la limite de f en 0.

Correction

1. Nous allons proposer deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que $(\sin(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tendent pas vers la même limite.

   Prenons $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2\pi n$ et $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \sin(x_n) = 0$ et $\sin(y_n) = 1$.
   Or, si la fonction sinus admet une limite en $+\infty$, les deux suites $(\sin(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ devraient tendre vers cette limite. Donc, sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. On fait de même en prenant les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.
3. Il faut montrer que la fonction f a une limite finie en 0. On prendra cette valeur pour définir le prolongement.

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.$$

   Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

Exercice 4 [*] Montrer que la fonction tan n'admet pas de limite en $+\infty$.

Correction On raisonne par l'absurde. Notons $\ell = \lim_{x\to+\infty} \tan(x)$.
D'une part, $\forall n \in \mathbb{N},\ \tan\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right) = 1$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right) = 1$ (suite constante).
D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4}+n\pi = +\infty$ donc puisque f admet une limite en $+\infty$, par composée de limite, $\lim_{n\to+\infty} \tan\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \ell$

Par unicité de la limite, $1=\ell$.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N},\ \tan(n\pi) = 0$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} \tan(n\pi) = 0$ (suite constante).
D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} n\pi = +\infty$ donc puisque f admet une limite en $+\infty$, par composée de limite, $\lim_{n\to+\infty} \tan(n\pi) = \ell$.
Par unicité de la limite, $0=\ell$.
C'est absurde donc tan n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 5 Étudier les limites suivantes. Dans beaucoup de cas, il pourra être intéressant de faire un calcul d'équivalent.

1. $\dfrac{x^3+x+52}{4x^3-30x^2}$ en $+\infty$
2. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^n-1}$ en $1 (n\in\mathbb{N}^*)$
3. $\dfrac{\sin(x\ln x)}{x}$ en 0
4. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ en 1
5. $x^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$
6. x^x en 0
7. $\sqrt{x^2+2x}-x$ en $+\infty$
8. $\dfrac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$ en 0
9. $2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$
10. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$
11. $x\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ en $+\infty$
12. $\ln(3x^2+2x)-\ln(2x^2+3x)$ en $+\infty$
13. $(1-e^x)\ln x$ en 0.
14. $\dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$ en $\dfrac{\pi}{4}$
15. $\dfrac{\sin(3x)}{\sqrt{1-2\cos(x)}}$ en $\dfrac{\pi}{3}$

Correction

1. $\dfrac{x^3+x+52}{4x^3-30x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{4x^3}$ donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x+52}{4x^3-30x^2} = \dfrac{1}{4}}$.
2. C'est une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$. On va factoriser par $x-1$.
$$\frac{x^2-3x+2}{x^n-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1).\sum_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{x-2}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$
Donc, $\boxed{\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^n-1} = \dfrac{-1}{n}}$.
3. $\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ donc, par substitution dans les équivalents, $\sin(x\ln(x)) \underset{x\to0^+}{\sim} x\ln(x)$.
Par quotient, $\dfrac{\sin(x\ln x)}{x} \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x)$.
Or, deux fonctions équivalentes ont la même limite donc $\boxed{\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(x\ln x)}{x} = -\infty}$.
4. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{x+2}{x-3}$ donc $\boxed{\lim_{x\to1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+3} = \dfrac{-3}{2}}$.

5. $x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ donc, par composée de limite, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.}$

6. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^x = \mathbf{e}^{x\ln(x)}$.
$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\mathbf{e}^0 = 1$. Par composition, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^x = 1}$.

7. Soit $x > 1$. $\sqrt{x^2+2x} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} - 1\right)$.
Or, $\sqrt{1+\frac{2}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{2x}$ donc, par produit d'équivalents, $\sqrt{x^2+2x} - x \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.
Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} - x = 1}$.

8. Par quotient d'équivalent, $\frac{\tan(3x)}{\sin(2x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(2x)} = \frac{2}{3}}$.

9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par substitution dans les équivalents, $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. Par produit, $2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$.
Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0}$.

10. Soit $x > 1$. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.
Par produit d'équivalent, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$. Donc, $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$.
Par composée de limites, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}}$.

11. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par substitution dans les équivalents, $1-\cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$.
Par produit, $x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0}$.

12. Soit $x > 1$.
$$\ln(3x^2+2x) - \ln(2x^2+3x) = \ln\left(\frac{3x^2+2x}{2x^2+3x}\right)$$
Or, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2x}{2x^2+3x} = \frac{3}{2}$ donc, par composée de limites, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(3x^2+2x) - \ln(2x^2+3x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$.

13. Par produit d'équivalents, $(1-e^x)\ln x \underset{x\to 0}{\sim} -x\ln(x)$.
Donc, $\boxed{\lim_{x\to 0} (1-e^x)\ln x = 0}$.

14. Posons $y = x - \frac{\pi}{4}$.
$$\frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}{y} = \frac{\cos(y)\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(y)\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos(y)\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(y)\frac{\sqrt{2}}{2}}{y} = \frac{\sqrt{2}\sin(y)}{y}$$
Or, $\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$ donc $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}}$.

15. Posons $y = x - \frac{\pi}{3}$.
$$\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-2\cos x}} = \frac{\sin(3y+\pi)}{\sqrt{1-2\cos(y+\frac{\pi}{3})}} = \frac{-\sin(3y)}{\sqrt{1-\cos(y)+\sqrt{3}\sin(y)}} = \frac{-\sin(3y)}{\sqrt{y}\sqrt{\frac{1-\cos(y)}{y}+\sqrt{3}\frac{\sin(y)}{y}}}$$

Or, $\lim_{y\to 0}\left(\frac{1-\cos(y)}{y}+\sqrt{3}\frac{\sin(y)}{y}\right)=\sqrt{3}$ donc $\frac{-\sin(3y)}{\sqrt{y}\sqrt{\frac{1-\cos(y)}{y}+\sqrt{3}\frac{\sin(y)}{y}}}\underset{y\to 0}{\sim}\frac{-3y}{\sqrt{\sqrt{3}y}}$.

Finalement, $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-2\cos x}}=\lim_{y\to 0}\frac{-3y}{\sqrt{\sqrt{3}y}}=0}$.

Exercice 6 Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point indiqué.

1. $\frac{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}{2}$ en $+\infty$ et en 0.
2. $x^2+x+2\ln(x)$ en 0 et en $+\infty$.
3. $\mathbf{e}^x+x^2$ en 0 et en $+\infty$.
4. $\ln(1+\sin(x))$ en 0.
5. $\ln(\cos(x))$ en 0.
6. $\ln(\sin(x))$ en $\frac{\pi}{2}$.

Correction

1. Soit $x>0$. $\frac{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}{2}=\frac{\mathbf{e}^x}{2}.(1+\mathbf{e}^{-2x})$. Or, $\lim_{x\to+\infty}1+\mathbf{e}^{-2x}=1$ donc $\boxed{\frac{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}{2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\mathbf{e}^x}{2}}$.
   $\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}{2}=1$ donc $\boxed{\frac{\mathbf{e}^x+\mathbf{e}^{-x}}{2}\underset{x\to 0}{\sim}1}$.
2. En 0 :
   $\frac{x^2+x+2\ln(x)}{2\ln(x)}=\frac{x^2}{2\ln(x)}+\frac{x}{2\ln(x)}+1$. Or, $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\ln(x)}+\frac{x}{2\ln(x)}=0$ donc $\boxed{x^2+x+2\ln(x)\underset{x\to 0}{\sim}2\ln(x)}$.
   En $+\infty$:
   $\frac{x^2+x+2\ln(x)}{x^2}=1+\frac{2\ln(x)}{x^2}+\frac{2\ln(x)}{x^2}$. Or,par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)}{x^2}+\frac{2\ln(x)}{x^2}=0$
   donc $\boxed{x^2+x+2\ln(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2}$.
3. En $+\infty$:
   $\frac{\mathbf{e}^x+x^2}{\mathbf{e}^x}=1+\frac{x^2}{\mathbf{e}^x}$. Or, par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathbf{e}^x}=0$ donc $\boxed{\mathbf{e}^x+x^2\underset{x\to+\infty}{\sim}\mathbf{e}^x}$.
   En 0 :
   $\lim_{x\to 0}\mathbf{e}^x+x^2=1$ donc $\boxed{\mathbf{e}^x+x^2\underset{x\to 0}{\sim}1}$.
4. $\lim_{x\to 0}\sin(x)=0$ donc $\ln(1+\sin(x))\underset{x\to 0}{\sim}\sin(x)$.
   De plus, $\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$. Donc, par transitivité, $\boxed{\ln(1+\sin(x))\underset{x\to 0}{\sim}x}$.
5. $\ln(\cos(x))=\ln(1+\cos(x)-1)$. Or, $\lim_{x\to 0}\cos(x)-1=0$ donc $\ln(1+\cos(x)-1)\underset{x\to 0}{\sim}\cos(x)-1$.
   De plus, $\cos(x)-1\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$.
   Par transitivité, $\boxed{\ln(\cos(x))\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{2}}$
6. On pose $y=\frac{\pi}{2}-x$ pour se ramener en 0.
   $\ln(\sin(x))=\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)$. Or, $\ln(\cos(y))\underset{y\to 0}{\sim}-\frac{y^2}{2}$.
   Donc, $\boxed{\ln(\sin(x))\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim}-\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{2}}$.

Exercice 7 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité aux points indiqués ?

1. $x \mapsto x\ln(2x)$ en 0.
2. $x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ en 0.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ en 0.
4. $x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^x}{x}$ en 0.
5. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
6. $x \mapsto \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}}$ en 0.
7. $x \mapsto \dfrac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2}$ en 1 et en 2.
8. $x \mapsto \tan(x)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ en $\dfrac{\pi}{2}$.

Correction

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(2x) = 0$ donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0)=0.}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln(x)} = 0$ donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0)=0.}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = +\infty$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0.}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0.}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq x$. Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0)=0.}$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathbf{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0.}$
7. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.
$\dfrac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)^2(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-1}$ donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2} = 0$.
Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 2 \text{ en posant } f(2)=0.}$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2} = +\infty$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 1.}$
8. C'est une forme indéterminée $\infty \times 0$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.
$$\tan(x)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$
Or, $\sin(X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ et $\cos(X) \underset{X\to 0}{\sim} 1$. Donc,
$$\tan(x)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} 1$$
Donc, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } \dfrac{\pi}{2} \text{ en posant } f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.}$

Exercice 8 Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points demandés.

1. $g : x \mapsto \lfloor x\rfloor + (x-\lfloor x\rfloor)^2$ en 0.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0.
3. $h : x \mapsto \dfrac{x^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor^x}$ en 2.

Correction

1. Soit $x \in \left[-\dfrac{1}{2},0\right[$. $g(x) = -1+(x+1)^2$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0$.
Soit $x \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right]$. $g(x) = x^2$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$.
Or, $g(0)=0$ donc g est continue en 0.

2. On introduit deux suites :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } y_n = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$

On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = \frac{1}{u_n} - \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor = n+1-\lfloor n+1 \rfloor = 0$ et
$f(y_n) = \frac{1}{y_n} - \left\lfloor \frac{1}{y_n} \right\rfloor = n + \frac{1}{2} - \left\lfloor n + \frac{1}{2} \right\rfloor = \frac{1}{2}$.

Donc, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$. Donc, $\boxed{f \text{ n'admet pas de limite en } 0}$.

3. On va utiliser l'écriture exponentielle de la fonction h.

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ h(x) = \frac{\exp(\lfloor x \rfloor \ln(x))}{\exp(x \ln(\lfloor x \rfloor))} = \exp\left[\lfloor x \rfloor \ln(x) - x \ln(\lfloor x \rfloor)\right]$$

- $h(2) = 1$.
- $\lim_{x\to 2^-} \lfloor x \rfloor \ln(x) - x\ln(\lfloor x \rfloor) = \ln(2) - 2\ln(1) = \ln(2)$. Donc, $\lim_{x\to 2^-} h(x) = 2$.
- $\lim_{x\to 2^+} \lfloor x \rfloor \ln(x) - x\ln(\lfloor x \rfloor) = 2\ln(2) - 2\ln(2) = 0$. Donc, $\lim_{x\to 2^+} h(x) = 1$.

Donc $\boxed{\text{la fonction } h \text{ n'est pas continue en } 2.}$