

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes

1. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \frac{x^5-x}{x^2-1}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = e^x - 2x + 1$ en $+\infty$.
4. $f(x) = 3xe^{-x^2}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
7. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
8. $f(x) = \cos(5x)e^{-3x}$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \frac{\sin(2x)}{5x}$ en 0.
10. $f(x) = \frac{x \sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$.
11. $f(x) = e^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 2 *Limites et parties entières*

1. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x[x]$.
Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 3 *Limites et fonction sinus*

1. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Montrer que la fonction f n'admet pas de limite en 0.
3. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Déterminer la limite de f en 0.

Exercice 4 [*] Montrer que la fonction tan n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 5 Étudier les limites suivantes. Dans beaucoup de cas, il pourra être intéressant de faire un calcul d'équivalent.

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{x^3+x+52}{4x^3-30x^2}$ en $+\infty$ | 9. $2x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ |
| 2. $\frac{x^2-3x+2}{x^n-1}$ en 1 ($n \in \mathbb{N}^*$) | 10. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$ |
| 3. $\frac{\sin(x \ln x)}{x}$ en 0 | 11. $x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ en $+\infty$ |
| 4. $\frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ en 1 | 12. $\ln(3x^2+2x) - \ln(2x^2+3x)$ en $+\infty$ |
| 5. $x^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$ | 13. $(1 - e^x) \ln x$ en 0. |
| 6. x^x en 0 | 14. $\frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $\frac{\pi}{4}$ |
| 7. $\sqrt{x^2+2x} - x$ en $+\infty$ | 15. $\frac{\sin(3x)}{\sqrt{1-2\cos(x)}}$ en $\frac{\pi}{3}$ |
| 8. $\frac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$ en 0 | |

Exercice 6 Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point indiqué.

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $+\infty$ et en 0. | 4. $\ln(1 + \sin(x))$ en 0. |
| 2. $x^2 + x + 2 \ln(x)$ en 0 et en $+\infty$. | 5. $\ln(\cos(x))$ en 0. |
| 3. $e^x + x^2$ en 0 et en $+\infty$. | 6. $\ln(\sin(x))$ en $\frac{\pi}{2}$. |

Exercice 7 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité aux points indiqués ?

1. $x \mapsto x \ln(2x)$ en 0.
2. $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$ en 0.
3. $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en 0.
4. $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ en 0.
5. $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.
6. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ en 0.
7. $x \mapsto \frac{(x-2)^2(x-3)}{x^2-3x+2}$ en 1 et en 2.
8. $x \mapsto \tan(x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 8 Etudier la continuité des fonctions suivantes aux points demandés.

1. $g : x \mapsto [x] + (x - [x])^2$ en 0.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ en 0.
3. $h : x \mapsto \frac{x^{[x]}}{[x]^x}$ en 2.