DM pour le mardi 11 février.

Calculs.

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} x \sin(e^{-3x})$.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
   Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle $\tilde{f}$ la fonction prolongée. Préciser $\tilde{f}$.
3. Déterminer un équivalent (le plus simple possible) en $+\infty$ de $x \mapsto \ln(1+x^2) - \sqrt{x}$.
   En déduire $\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x^2) - \sqrt{x}$.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sin(x)\ln(1+2x)$.
   En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+2x) - 2x^2}{x^3}$

Exercice.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.
2. En déduire la nature de la suite u.
3. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$ quand n tend vers $+\infty$.
4. En déduire qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que l'on déterminera) telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + v_n + o(v_n)$$