Correction du DM pour le mardi 11 février.

Calculs.

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ et $\sin y \underset{0}{\sim} y$ donc par substitution, $\sin(e^{-3x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-3x}$.
   Puis, par produit des équivalents, $\boxed{x\sin(e^{-3x}) \underset{+\infty}{\sim} xe^{-3x}}$.
   Or $\lim_{x\to+\infty} xe^{-3x} = 0$ par croissances comparées. $\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} x\sin(e^{-3x}) = 0}$.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.
   Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle $\tilde{f}$ la fonction prolongée. Préciser $\tilde{f}$.
3. Soit $x > 1$.
   $\ln(1+x^2)-\sqrt{x} = \ln(x^2(1+1/x^2))-\sqrt{x} = 2\ln x+\ln(1+1/x^2)-\sqrt{x} = -\sqrt{x}\left[1-2\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} - \dfrac{\ln(1+1/x^2)}{\sqrt{x}}\right]$.
   Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$. Par quotient de limites, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+1/x^2)}{\sqrt{x}} = 0$.
   Donc, par somme, $\lim_{x\to+\infty}\left[1-2\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} - \dfrac{\ln(1+1/x^2)}{\sqrt{x}}\right] = 1$.
   Donc, $\boxed{\ln(1+x^2)-\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\sqrt{x}}$.
4. Par opérations usuelles sur les développements limités, on trouve $\boxed{\sin(x)\ln(1+2x) \underset{x\to0}{=} 2x^2-2x^3+o(x^3)}$.
   Donc $\sin(x)\ln(1+2x)-2x^2 \underset{x\to0}{=} -2x^3+o(x^3)$.
   Ce développement limité est non-nul, on en déduit un équivalent : $\sin(x)\ln(1+2x)-2x^2 \underset{x\to0}{\sim} -2x^3$.
   Donc, par quotient des équivalents, $\dfrac{\sin(x)\ln(1+2x)-2x^2}{x^3} \underset{x\to0}{\sim} -2$.
   On en déduit $\boxed{\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+2x)-2x^2}{x^3} = -2}$.

Exercice.

1. On raisonne par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, "$u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$".
   I Pour $n = 0$.
   $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2^0}{1+2^0} = \dfrac{1}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.
   H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
   $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n} = \dfrac{\frac{2^{n+1}}{1+2^n}}{1+\frac{2^n}{1+2^n}} = \dfrac{2^{n+1}}{1+2^n}.\dfrac{1+2^n}{1+2.2^n} = \dfrac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$.
   Donc, $P(n+1)$ est vraie.
   C Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n - 1 = \dfrac{2^n}{1+2^n} - 1 = \dfrac{2^n-1-2^n}{1+2^n} = \dfrac{-1}{1+2^n}$.
   Or, $1+2^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$ donc, par quotient, $\boxed{u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -2^{-n}}$.
3. On peut alors écrire $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -2^{-n} + o(-2^{-n})$.
   Finalement, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1-2^{-n}+o(2^{-n})}$.