Chapitre 20 : Développements limités

(prof)

Table des matières

1 Fonction négligeable devant une autre

1.1 Définition

Définition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec g non nulle au voisinage de a.
f est négligeable devant g au voisinage de a signifie que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
On note $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Exemple 2.

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$ donc $\cos(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$
- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^4} = 0$ donc $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^4\right)$
- On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4}{x^2} = 0$ donc $x^4 \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right)$

Théorème 3 (Croissances comparées)**.**

Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

1. $\ln(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x)$.
2. $x \underset{x \to +\infty}{=} o(\mathbf{e}^x)$.
3. $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\mathbf{e}^{\beta x}\right)$.
4. $\ln^\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^\beta\right)$.

1.2 Caractérisation

Théorème 4.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec g non nulle au voisinage de a.
On a équivalence entre :

1. $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$,
2. Il existe une fonction ε telle que $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple 5. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés. Comparer x^n et x^{n+p} au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$.

- $x^{n+p} = x^n.x^p$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^p = 0$ donc $x^{n+p} \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$.
- $x^n = x^{n+p}.\dfrac{1}{x^p}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$ donc $x^n \underset{x \to +\infty}{=} o(x^{n+p})$.

Théorème 6 (Manipulation des petits o)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ avec g non nulle au voisinage de a.

1. $f(x) \underset{x \to a}{=} o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
2. Si $f(x) - h(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) \underset{x \to a}{=} h(x) + o(g(x))$.

1.3 Premiers développements limités

Théorème 7 (Lien avec les équivalents)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ avec g non nulle au voisinage de a.
Il y a équivalence entre

1. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
2. $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$.

Théorème 8.

1. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
2. $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
3. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
4. $\mathbf{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$.
5. $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$.
6. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.

1.4 Propriétés des $o()$

Théorème 9 (Addition)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soient f, g, $h : I \to \mathbb{R}$ non nulle au voisinage de a.

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $h \underset{a}{=} o(g)$ alors $f + h \underset{a}{=} o(g)$ et $f - h \underset{a}{=} o(g)$.
2. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \leq p$.
   (a) $o(x^n) + o(x^p) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.
   (b) $o(x^n) + o(x^p) \underset{x\to +\infty}{=} o(x^p)$.
3. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $o(f) + o(g) \underset{a}{=} o(g)$.

Exemple 10. Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto \tan(x) + \sin(x)$ et de $x \mapsto \tan(x) - \sin(x)$.

- $\tan(x) + \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) + x + o(x) \underset{x\to 0}{=} 2x + o(x)$
- $\tan(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) - x - o(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$

Théorème 11 (Multiplication, Quotient)**.**

Soient f, g, h, $k : I \to \mathbb{R}$ non nulle au voisinage de a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

1. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\lambda.f \underset{a}{=} o(g)$ $\qquad \lambda.\, o(g) \underset{a}{=} o(g)$.
2. Si $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$ alors $f \underset{a}{=} o(g)$. $\qquad o(\lambda.g) \underset{a}{=} o(g)$.
3. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$. $\qquad o(o(h)) \underset{a}{=} o(h)$.
4. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gh)$. $\qquad h\, o(g) \underset{a}{=} o(g)\, h \underset{a}{=} o(gh)$.
5. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\dfrac{f}{h} \underset{a}{=} o\left(\dfrac{g}{h}\right)$. $\qquad \dfrac{o(g)}{h} \underset{a}{=} o\left(\dfrac{g}{h}\right)$.
6. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et si $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$. $\qquad o(g)\, o(k) \underset{a}{=} o(gk)$.
7. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f^n \underset{a}{=} o(g^n)$. $\qquad o(g)^n \underset{a}{=} o(g^n)$.
8. Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\dfrac{1}{g} \underset{a}{=} o\left(\dfrac{1}{f}\right)$.

Exemple 12. Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto 2\tan(x) - 3\sin(x)$.

$3\tan(x) - 2\sin(x) \underset{x\to 0}{=} 2x + 2\, o(x) - 3x - 3\, o(x) = -x + o(x)$.
Donc, $3\tan(x) - 2\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$.

Exemple 13. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - \sqrt{1+x}}{x}$.

$\mathbf{e}^x - \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x) - 1 - \dfrac{x}{2} - o(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{2} - o(x)$.
Donc, $\mathbf{e}^x - \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$. Donc, $\dfrac{\mathbf{e}^x - \sqrt{1+x}}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$.
Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - \sqrt{1+x}}{x} = \frac{1}{2}$.

Théorème 14 (Substitution)**.**

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a.
Soit $h : J \to \mathbb{R}$ avec $h(J) \subset I$.
Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $\displaystyle\lim_{y\to b} h(y) = a$ alors $f(h(x)) \underset{x\to b}{=} o(g(h(x)))$.

Exemple 15.

- $\cos(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{(x^2)^2}{2} + o\big((x^2)^2\big) = 1 - \dfrac{x^4}{2} + o\big(x^4\big)$.
- $\mathbf{e}^{-x^4} \underset{x\to 0}{=} 1 + (-x^4) + o\big((-x^4)\big) = 1 - x^4 + o\big(x^4\big)$

Théorème 16 (Substitution par des équivalents)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{I}$.
Soient $f_1, f_2, g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ non nulles au voisinage de a.

1. Si $\begin{cases} f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x)) \\ f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x) \end{cases}$ alors $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x))$.
2. Si $\begin{cases} f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x)) \\ g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x) \end{cases}$ alors $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_2(x))$.

Exemple 17. Simplifier les expressions suivantes : $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\big(x^4+2x\big)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\big((\sin(x))^3\big)$

$x^4+2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(2x)$.
$\sin(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ donc $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\big(x^3\big)$.

2 Développements limités en 0

Un développement limité d'une fonction f en 0 donnera de l'information sur la fonction f au voisinage de 0. On va approcher la fonction f **autour de 0** par un polynôme.

2.1 Définitions et premiers exemples

Définition 18.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction f admet une développement limité à l'ordre n en 0 signifie qu'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

La fonction polynomiale $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la partie régulière du développement limité.

Notation On notera souvent $\mathrm{DL}_n(0)$ pour parler d'un développement limité à l'ordre n en 0.

Exemple 19. Développements limités à l'ordre 1 en 0

1. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
2. $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$.
3. $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$
4. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$.
5. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
6. $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} + o(x)$.

Exemple 20. Soit $f(x) = \pi + 5x + 3x\sqrt{x}$. Déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0.

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x\sqrt{x}}{x} = 0$ donc $3x\sqrt{x} \underset{x\to 0}{=} o(x)$.
Donc, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \pi + 5x + o(x)$.

Théorème 21.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

Démonstration : $\displaystyle\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Donc, $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Or, $\displaystyle\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n . \frac{x}{1-x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$ donc $\displaystyle\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.

Finalement, $\displaystyle\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$. ■

2.2 Développements limités obtenus par substitution

Théorème 22 (Substitution)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que f admette un $\mathrm{DL}_n(0)$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
Pour toute fonction g défini au voisinage de 0 tel que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ alors

$$f(g(x)) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k g(x)^k + o(g(x)^n)\,.$$

Exemple 23. Déterminer un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$ donc on peut substituer x par $-x$ dans le théorème précédent.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-(-x)} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-x)^k + o((-x)^n)\\
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k.x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n.x^{,} + o(x^n)
\end{aligned}$$

Exemple 24. En remplaçant x par $-x^2$ on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k + o(x^n) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o\big(x^{2n}\big)$$

On a maintenant un développement limité à l'ordre $2n$ et non plus n.

2.3 Développements limités obtenus par primitivation

Théorème 25.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant des primitives sur I. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ alors toutes les primitives F de f sur I admettent un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\big(x^{n+1}\big)$$

Remarque 26. On peut donc intégrer les développements limités en n'oubliant pas **la constante d'intégration**.

Exemple 27.

1. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de sin en 0.

   On va commencer par le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la dérivée de sin.

$$\begin{aligned}
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)\\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} \sin(0) + x + o\big(x^2\big)\\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x + o\big(x^2\big)
\end{aligned}$$

2. Déterminer un développement limité de cos en 0 à l'ordre 3.

   On intègre de nouveau le développement limité de la question précédente.

$$\begin{aligned}
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)\\
-\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} -\cos(0) + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

3. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \to \ln(1+x)$.

   On commence par le développement limité à l'ordre 2 de la dérivée de $x \mapsto \ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)\\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Exemple 28.

1. Rappeler la dérivée de la fonction tan.
   $\tan' = 1 + \tan^2$.
2. En déduire un développement limité à l'ordre 5 en 0 de tan.

$$\begin{aligned}
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x + o(x)\\
(\tan(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2 + 2x\, o(x) + (o(x))^2\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^2\right)\\
1 + (\tan(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o\left(x^2\right)\\
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\\
(\tan(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\right)^2\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 + \frac{x^9}{9} + o\left(x^6\right) + \frac{2}{3}x^4 + 2x\, o\left(x^3\right) + \frac{2}{3}x^3\, o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o\left(x^4\right)\\
1 + (\tan(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o\left(x^4\right)\\
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

2.4 Développements limités obtenus par la formule de Taylor-Young

Théorème 29.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors, la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Exemple 30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \mathbf{e}^x$.

On va calculer les dérivées successives en 0 de $f : x \mapsto \mathbf{e}^x$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = f$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 1$.
Finalement, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Exemple 31. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 3 de $x \mapsto \sin(x)$.

On va calculer les trois premières dérivées de $f = \sin$.

- $f' = \cos$. Donc, $f'(0) = 1$.
- $f^{(2)}(x) = -\sin$. Donc, $f^{(2)}(0) = 0$.
- $f^{(3)}(x) = -\cos$. Donc, $f^{(3)}(0) = -1$.

Finalement, $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

Exemple 32. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
On va calculer les trois premières dérivées en 0 de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Donc, $f'(0) = \frac{1}{2}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^{(2)}(x) = \frac{1}{2}.\frac{-1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$. Donc, $f^{(2)}(0) = \frac{-1}{4}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f^{(3)}(x) = \frac{1}{2}.\frac{-1}{2}.\frac{-3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$. Donc, $f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$.

Finalement, $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.\frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}.\frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} + o(x^3)$.

2.5 Développements limités obtenus par opérations sur des développements limités usuels

Théorème 33.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant des développements limités à l'ordre n en 0.

1. La fonction $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 obtenu en additionnant les développements limités de f et de g.
2. La fonction fg admet un développement à l'ordre n en 0 obtenu en multipliant les développements limités de f et de g.

Exemple 34. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions ch : $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2}$ et sh : $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2}$.

- $\frac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.
- $\frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{2} \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Exemple 35. Déterminer un développement limité de $x \to \frac{\sin(x)}{x}$ à l'ordre 4 en 0.

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x} = \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4).$$

Exemple 36. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{e}^x \cos(x)$. Déterminer le développement limité de cette fonction à l'ordre 3 en 0.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^x \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)+x-\frac{x^3}{2}+o(x^4)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+o(x^5)+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{12}+o(x^6)+o(x^3)+o(x^5)+o(x^6)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)
\end{aligned}$$

Exemple 37. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\cos(x))^2$. Déterminer le développement limité de cette fonction à l'ordre 4 en 0.

$$\begin{aligned}
(\cos(x))^2 &= \frac{1+\cos(2x)}{2}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1+1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(2-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)
\end{aligned}$$

2.6 Développements limités obtenus par composition à droite

Exemple 38. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \mathbf{e}^{\sin(x)}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ donc on peut substituer x par $\sin(x)$ dans le développement limité en 0 de exp.

$$\mathbf{e}^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+\sin(x)+\frac{(\sin(x))^2}{2}+\frac{(\sin(x))^3}{3!}+o\big((\sin(x))^3\big)$$

On s'occupe ensuite de chaque terme séparément.

$$\begin{aligned}
(\sin(x))^3 &\underset{x\to 0}{\sim} x^3 \text{ donc } o\big((\sin(x))^3\big) \underset{x\to 0}{=} o(x^3)\\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\\
(\sin(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2+o(x^3)\\
(\sin(x))^3 &\underset{x\to 0}{=} x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbf{e}^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

Exemple 39. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+\tan(x))$.

$\lim\limits_{x\to 0} \tan(x) = 0$ donc on peut substituer x par $\tan(x)$ dans le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

$$\ln(1+\tan(x)) \underset{x\to 0}{=} \tan(x)-\frac{(\tan(x))^2}{2}+\frac{(\tan(x))^3}{3}+o\big((\tan(x))^3\big)$$

On s'occupe ensuite de chaque terme séparément.

$$\begin{aligned}
(\tan(x))^3 &\underset{x\to 0}{\sim} x^3 \text{ donc } o\big((\tan(x))^3\big) \underset{x\to 0}{=} o\big(x^3\big) \\
\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+o\big(x^3\big) \\
(\tan(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2+o\big(x^3\big) \\
(\tan(x))^3 &\underset{x\to 0}{=} x^3+o\big(x^3\big)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\ln(1+\tan(x)) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\big(x^3\big) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+o\big(x^3\big)$$

3 Propriétés des développements limités

3.1 Troncature d'un développement limité

Théorème 40.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a alors elle admet un développement limité à tout ordre inférieur à n en a.
Les coefficients sont obtenus en tronquant le développement limité d'ordre n à l'ordre souhaité.

3.2 Unicité du développement limité

Théorème 41.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en a alors ses coefficients $(a_0, \dots, a_n)$ sont uniques.

Théorème 42.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Si f est paire et admet un développement limité d'ordre n en 0 alors les coefficients d'indice impair sont nuls.
2. Si f est impaire et admet un développement limité d'ordre n en 0 alors les coefficients d'indice pair sont nuls.

3.3 Calculs de limites et d'équivalents

Théorème 43.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en 0 alors f est équivalente en a au premier terme **non nul** de son développement limité.

Exemple 44. Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $x \to \ln(1+x) - \sin(x)$.

On va déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction.

$$\ln(1+x)-\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}-x+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

Donc, $\ln(1-x)-\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Exemple 45. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x^2}$.

$$\mathrm{e}^x-x-1 \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x-1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

Donc, $\frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x^2}=\frac{1}{2}$.

3.4 Etude locale de fonction

Théorème 46.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Soit $f: I\to\mathbb{R}$. Soit $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$.
On suppose que f admet un développement limité en 0 de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0+a_1x+a_px^p+o(x^p)$.

1. La tangente à la courbe de la fonction f en 0 a pour équation $y=a_0+a_1x$.
2. La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de a_px^p au voisinage de 0.

Exemple 47. Soit $f: x\mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

   $D_f=]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en 0.
   On va utiliser un développement limité de f en 0.

   $$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}+o(1)$$

   Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{2}$.
3. Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

   Il faut obtenir un développement limité à l'ordre 2 pour pouvoir conclure.

   $$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)-x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)$$

   La tangente en 0 a pour équation $y=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$.
   De plus, $f(x)-\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{4}$. Donc, la courbe est en dessous de la tangente.

4 Formulaire de développements limités usuels en 0

$\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=}$	....
$\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=}$	....
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\mathbf{e}^x \underset{x\to 0}{=}$	....
$\cos(x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\sin(x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\tan(x) \underset{x\to 0}{=}$	....
$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=}$	....
$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=}$	....