Exercice 1 Déterminer un équivalent puis un développement limité en 0 aux ordres $1, 2, 3$ et 4 de :

1. $x \mapsto \sqrt{\pi}$
2. $x \mapsto x^3 + x + 1$
3. $x \mapsto x^5 + 2x^4 + 3x + 3$
4. $x \mapsto x^3 + x^4(\mathbf{e}^x - 1)$

Exercice 2 Déterminer les développements limités à l'ordre indiqué en 0.

1. $f(x) = x\mathbf{e}^{-x}$ à l'ordre 3.
2. $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}\ln(1+x)$ à l'ordre 4.
3. $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)$ à l'ordre 5.
4. $k(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ à l'ordre 4. Montrer que $k(x) \underset{x\to 0}{=} \mathcal{O}(x^4)$.

Exercice 3 Calculer les limites en 0, lorsqu'elles existent, des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$
2. $x \mapsto \dfrac{\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x}$
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x}{x^3}$

Exercice 4 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$
2. $x \mapsto \sin(3x) - 3\sin x$
3. $x \mapsto \ln(2+x)$
4. $x \mapsto \sqrt{2+3x}$
5. $x \mapsto \ln(\cos x)$
6. $x \mapsto e^{\sin x} - e^x$

Exercice 5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathbf{e}^{\sin(x)} \end{cases}$

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$.
2. Etudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 6 Déterminer les développements limités au point et à l'ordre indiqués.

1. $f(x) = \ln(2 + \sin(x))$ en $x = 0$ à l'ordre 3.
2. $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en $x = 0$ à l'ordre 2.

Exercice 7

1. Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ en $x = 0$.

Exercice 8 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + \cos x}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{3 + \sin(x)}$
3. $x \mapsto \dfrac{e^x}{\cos x}$

Exercice 9 [$*$] Soit $f : x \mapsto x^2(e^x - 1)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathcal{O}(x^2)$.
2. Montrer que f ne possède pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.
   On raisonnera par l'absurde.