

Exercice 1 Déterminer un équivalent puis un développement limité en 0 aux ordres 1, 2, 3 et 4 de :

1. $x \mapsto \sqrt{\pi}$
2. $x \mapsto x^3 + x + 1$
3. $x \mapsto x^5 + 2x^4 + 3x + 3$
4. $x \mapsto x^3 + x^4(e^x - 1)$

Correction

1. $\sqrt{\pi} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\pi}$ et $\sqrt{\pi} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{\pi} + \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{\pi} + \mathcal{O}(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{\pi} + \mathcal{O}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{\pi} + \mathcal{O}(x^4)$.
2. $x^3 + x + 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ et $x^3 + x + 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + 1 + \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + 1 + \mathcal{O}(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + x + 1 + \mathcal{O}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + x + 1 + \mathcal{O}(x^4)$.
3. $x^5 + 2x^4 + 3x + 3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3$ et $x^5 + 2x^4 + 3x + 3 \underset{x \rightarrow 0}{=} 3x + 3 + \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3x + 3 + \mathcal{O}(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 3x + 3 + \mathcal{O}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x^4 + 3x + 3 + \mathcal{O}(x^4)$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} x(e^x - 1) = 0$ donc $x^3 + x^4(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$.
Donc, $x^3 + x^4(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + \mathcal{O}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.

Exercice 2 Déterminer les développements limités à l'ordre indiqué en 0.

1. $f(x) = xe^{-x}$ à l'ordre 3.
2. $g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
3. $h(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)$ à l'ordre 5.
4. $k(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ à l'ordre 4. Montrer que $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^4)$.

Correction

1. $e^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ donc $xe^{-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^3)$.
2. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^6)$ donc $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathcal{O}(x^5)$.
 $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)$.
Par produit,
$$\frac{\sin(x)}{x} \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathcal{O}(x^5)\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)\right)$$
$$\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$
3. $\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1+x^2) - \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^5) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)\right)$
donc, $\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathcal{O}(x^5)$
4. $\frac{k(x)}{x^4} = \frac{1}{x^4} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{X^2}{e^X}$ avec $X \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x^2}$.
Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et, par croissance comparée, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0$.
Par composition de limites, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(x)}{x^4} = 0$. Donc, $k(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^4)$.

Exercice 3 Calculer les limites en 0, lorsqu'elles existent, des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$
2. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1$
3. $x \mapsto \frac{\sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x}{x^3}$

Correction

$$1. \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + o(1).$$

$$\text{Donc, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2} = -1}.$$

$$2. \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{x}{2} + o(x) - 1 + \frac{x}{2} + o(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1) \text{ donc il faut un développement limité à l'ordre suivant.}$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x).$$

$$\text{Donc, } \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + o(x) - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1). \text{ Donc, } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} - 1}{x} = 0}.$$

3. On va proposer des développements limités à l'ordre 3 en 0 de chacune des fonctions présentes au numérateur.

$$\sqrt{1+2x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + \frac{(2x)^3}{16} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$\text{Donc, } \frac{\sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{2}{3} + o(1).$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\frac{\sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{3}}.$$

Exercice 4 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(x) \cos(2x)$
2. $x \mapsto \sin(3x) - 3 \sin x$
3. $x \mapsto \ln(2+x)$
4. $x \mapsto \sqrt{2+3x}$
5. $x \mapsto \ln(\cos x)$
6. $x \mapsto e^{\sin x} - e^x$

Correction

$$1. \sin(x) \cos(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{13}{6}x^3 + o(x^3).$$

$$2. \sin(3x) - 3 \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} -4x^3 + o(x^3).$$

$$3. \ln(2+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

$$4. \sqrt{2+3x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{2} \left[1 + \frac{3}{4}x - \frac{9}{32}x^2 + \frac{27}{128}x^3 \right] + o(x^3).$$

$$5. \ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

6. $e^{\sin x} - e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$

Exercice 5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\sin(x)} \end{cases}$

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$.
- Etudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Correction

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ donc on peut substituer x par $\sin(x)$ dans le développement limité en 0 de exp.

$$e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sin(x) + \frac{(\sin(x))^2}{2} + o((\sin(x))^2)$$

On s'occupe ensuite de chaque terme séparément.

$$\begin{aligned} (\sin(x))^2 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \text{ donc } o((\sin(x))^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2) \\ \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x^2) \\ (\sin(x))^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Finalement,

$$e^{\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

La tangente à la courbe est donc la droite d'équation $y = 1 + x$.

- Le signe de $f(x) - (1 + x)$ nous permet de déterminer la position de la droite par rapport à la courbe.

On a $f(x) - (1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $f(x) - (x + 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ donc $f(x) - (1 + x) > 0$ au voisinage de 0.

Donc, La courbe est au dessus de la tangente en 0.

Exercice 6 Déterminer les développements limités au point et à l'ordre indiqués.

- $f(x) = \ln(2 + \sin(x))$ en $x = 0$ à l'ordre 3.
- $h(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ en $x = 0$ à l'ordre 2.

Correction

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= \ln(2 + \sin(x)) = \ln\left(2\left(1 + \frac{\sin(x)}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \text{ où } u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} o(u^3) \text{ donc } \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3) \\ u(x)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{4} + o(x^3) \\ u(x)^3 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3}{8} + o(x^3) \end{aligned}$$

Donc, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$.

$$2. h(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} e \cdot \left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^2)\right) \text{ où}$$

$$u(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\begin{aligned} u(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \mathcal{O}(x^2) \\ u(x)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{4} \\ \mathcal{O}(u^2) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} + \mathcal{O}(x^2).$$

Exercice 7

- Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$ en $x = 0$.
- Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ en $x = 0$.

Correction

$$1. \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3))}{x \sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)}{x \sin(x)}.$$

$$\text{Donc, } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{6}}.$$

$$2. \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} = \frac{(x - \sin(x))(x + \sin(x))}{x^2 \sin^2(x)}.$$

$$\text{Or, } x + \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x + \mathcal{O}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + \mathcal{O}(x). \text{ Donc, } x + \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x.$$

$$\text{Donc, par produit et quotient, } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6} \cdot 2x}{x^4}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}}.$$

Exercice 8 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes.

- $x \mapsto \frac{1}{e^x + \cos x}$
- $x \mapsto \frac{1}{3 + \sin(x)}$
- $x \mapsto \frac{e^x}{\cos x}$

Correction

$$1. \frac{1}{e^x + \cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{5}{48}x^3 + \mathcal{O}(x^3).$$

$$2. \frac{1}{3 + \sin x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} + \frac{x^3}{162} + \mathcal{O}(x^3).$$

$$3. \frac{e^x}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^3).$$

Exercice 9 [*] Soit $f : x \mapsto x^2(e^x - 1) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^2)$.
2. Montrer que f ne possède pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.
On raisonnera par l'absurde.

Correction

1. On va étudier $\frac{f(x)}{x^2} = (e^x - 1) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$0 \leq \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left| (e^x - 1) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |e^x - 1|.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} |e^x - 1| = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} \left| (e^x - 1) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0$.

On en déduit que $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \mathcal{O}(x^2)}$.

2. On raisonne par l'absurde et on suppose que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 3.

Donc, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} ax^3 + \mathcal{O}(x^3)$.

Donc, $\frac{f(x)}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} a + \mathcal{O}(1)$. Donc, $g : x \rightarrow \frac{f(x)}{x^3}$ admet une limite finie en 0.

On va montrer que c'est absurde.

Prenons $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Ces deux suites convergent vers 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}, g(x_n) = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \cos(2\pi n) = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \text{ et } g(y_n) = \frac{e^{y_n} - 1}{y_n} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(y_n) = 0$.

Donc, il est absurde de supposer que la fonction g admette une limite finie en 0.

Donc, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'admet pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.}}$