Exercice 1 Dans chacune des expériences suivantes, déterminer $X(\Omega)$ et reconnaître la loi de X (uniforme, bernoulli, binomiale). Préciser ses paramètres.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires, et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X est le nombre de bosses.
3. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. X est le nombre de cartes que l'on a retournées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon et d'une fille sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
5. On suppose que 1 pour cent des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. X est le nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 2
Un joueur lance deux fois de suite un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du second lancer.

1. Déterminer les lois de X, $|X|$, X^2.
2. Calculer l'espérance et la variance des lois X et $|X|$.

Exercice 3 Un jugement est soumis au vote d'un jury de 12 membres. Ce jugement doit être voté à la majorité des deux tiers pour devenir exécutoire. Les jurés ont le choix entre deux décisions A et B. Il se déterminent indépendamment les uns des autres et la probabilité de choisir la décision A est θ pour chacun d'eux.

1. Soit X le nombre de jurés prenant la décision A. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que la décision A soit adoptée par le jury ?

Exercice 4 Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, ..., N, ...$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ elle se trouve à la case 0. On note X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où elle a sauté d'une seule case au cours des n premiers sauts.

1. Déterminer la loi de X_1, puis son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y_n, puis son espérance et sa variance.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de X_n puis son espérance et sa variance.

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont affichés sur un compteur détraqué :

- si $X \neq 0$, le compteur affiche X.
- Si $X = 0$, le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 et n.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au nombre affiché sur le compteur.
   On pourra commencer par $P(Y = 1)$.
2. Préciser $E(Y)$ et vérifier que $E(Y) \geq E(X)$.

Exercice 6 Soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X = k) = \lambda k.$$

Déterminer λ, $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 7 Simulations de variables aléatoires réelle

1. Rappeler le moyen de simuler une loi de Bernoulli de paramètre p.
2. Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leq b$, et soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
   (a) Déterminer μ et n tels que la variable aléatoire $Y = X + \mu$ suive la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
   (b) En déduire $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 8 Problème des rencontres
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise.
On dit qu'il y a rencontre au i-ème tirage si la i-ème boule tirée porte le numéro i.

1. Déterminer la probabilité d'une rencontre au premier tirage.
2. Déterminer la probabilité d'une rencontre au second tirage.
3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculer la probabilité qu'il y ait rencontre au $i-$ème tirage.
   On pourra penser aux permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de rencontres. Déterminer $\mathrm{E}(X)$.
   on pourra décomposer X en somme de variables de Bernoulli.

Exercice 9 Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires.
On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.
On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier tirage (respectivement le second tirage) amène une boule blanche, 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X_1 et celle de X_2.
2. Soit $k \in X_1(\Omega)$. Déterminer, à partir de l'énoncé, $P(X_2 = 0|X_1 = k)$ et $P(X_2 = 1|X_1 = k)$.
3. En déduire la loi du couple (X_1, X_2).
4. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 10 Soit un entier $n \geq 2$.
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n.
Dans l'urne numéro k, il y a k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une urne au hasard puis dans celle-ci, on pioche une boule au hasard.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie, et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $j \in [\![1, i]\!]$. Déterminer, à partir de l'énoncé, $P(Y = j|X = i)$.
3. En déduire la loi du couple (X, Y), puis la loi de X et celle de Y.
   (on exprimera certaines probabilités sous forme de sommes).
4. Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$.

Exercice 11 On lance n fois une pièce non truquée. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce donne pile et 0 sinon.
On note F_n la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de "pile" au cours des n expériences.

1. Exprimer F_n en fonction de $X_1, \ldots, X_n$.
2. Calculer $\mathrm{E}(F_n)$ et $\mathrm{V}(F_n)$.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0, on ait $P\left(0,49 < F_n < 0,51\right) \geq 95\%$ (on dit alors que $]0,49\,;0,51[$ est un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95%).