Correction du DM pour le mardi 11 mars.

Calculs.

1. $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ et $\sin y \underset{0}{\sim} y$ donc par substitution, $\sin(e^{-3x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-3x}$.
   Puis, par produit des équivalents, $\boxed{x\sin(e^{-3x}) \underset{+\infty}{\sim} xe^{-3x}}$.
   Or $\lim_{x\to+\infty} xe^{-3x} = 0$ par croissances comparées. $\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} x\sin(e^{-3x}) = 0}$.
2. Soit $x > 1$.
   $\ln(1+x^2) - \sqrt{x} = \ln(x^2(1+1/x^2)) - \sqrt{x} = 2\ln x + \ln(1+1/x^2) - \sqrt{x} = -\sqrt{x}\left[1 - 2\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{\sqrt{x}}\right]$.
   Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$. Par quotient de limites, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+1/x^2)}{\sqrt{x}} = 0$.
   Donc, par somme, $\lim_{x\to+\infty} \left[1 - 2\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(1+1/x^2)}{\sqrt{x}}\right] = 1$.
   Donc, $\boxed{\ln(1+x^2) - \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\sqrt{x}}$.
3. Par opérations usuelles sur les développements limités, on trouve $\boxed{\sqrt{1+2x} - \cos(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$.
   Donc $\sqrt{1+2x} - \cos(x) - x \underset{0}{=} \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Ce développement limité est non-nul, on en déduit un équivalent : $\sqrt{1+2x} - \cos(x) - x \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}$. Donc, par quotient des équivalents, $\frac{\sqrt{1+2x} - \cos(x) - x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$.
   On en déduit $\boxed{\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+2x} - \cos(x) - x}{x^3} = \frac{1}{2}}$.

Exercice.

1. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ car c'est la somme de deux fonctions dérivables (sur $\mathbb{R}$) donc sur $[0,1]$), et $\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = -ne^{-nx} - 1 < 0$.
   On en déduit que f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = e^-n - 1$, d'où le tableau de variation de f_n :

x	0		1
f_n	1	$\searrow$	$e^{-n} - 1$

2. f_n est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$, donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur son image $f_n([0,1]) = [e^{-n} - 1, 1]$.
   De plus, $0 \in [e^{-n} - 1, 1]$ (ensemble d'arrivée de la bijection) puisque $-n < 0$ donc $e^{-n} < 1$.
   Donc 0 admet un unique antécédent (appartenant à $[0,1]$) par f_n.
   $\boxed{\text{Cela signifie qu'il existe un unique } x_n \in [0,1] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Soit $x \in [0,1]$ fixé quelconque.
   $f_n(x)e^{-x} + x(e^{-x} - 1) = (e^{-nx} - x)e^{-x} + xe^{-x} - x = e^{-nx}e^{-x} - x = e^{-(n+1)x} - x$ (c'est $f_{n+1}(x)$).
   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) = f_n(x)e^{-x} + x(e^{-x} - 1)}$.
4. L'égalité précédente est vraie pour tout $x \in [0,1]$ donc elle est vraie en x_n. Donc $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n)e^{-x_n} + x_n(e^{-x_n} - 1)$. Or $f_n(x_n) = 0$, donc $f_{n+1}(x_n) = x_n(e^{-x_n} - 1)$.
   Or $x_n \in [0,1]$ donc $e^{-x_n} < 1$, donc $e^{-x_n} - 1 < 0$. Donc le produit $x_n(e^{-x_n} - 1)$ est négatif. $\boxed{\text{Ainsi, } f_{n+1}(x_n) < 0}$.
   On en déduit le tableau de variation de f_{n+1} dans lequel on place les points x_n et x_{n+1} :

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x & 0 & & x_{n+1} & & x_n & & 1 \\
\hline
 & 1 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
f_n & & & 0 & & & & \\
 & & & & \searrow & & & \\
 & & & & & f_{n+1}(x_n) & & \\
 & & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & & e^{-n-1}-1
\end{array}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.
Si $x_n \leqslant x_{n+1}$, alors, comme f_{n+1} est décroissante sur $[0,1]$, on aurait $f_{n+1}(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_{n+1})$, or ce n'est pas le cas puisque $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(x_n) < 0$. Donc $x_n > x_{n+1}$.
Ceci est vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque donc c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{\text{Donc la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

6. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, minorée (par 0) donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{cette suite est convergente}}$.

7. $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n \leqslant 1 \end{cases}$$
Donc par passage à la limite dans l'inégalité, $\boxed{\ell \in [0,1]}$.

8. Nous avons vu que $\ell \in [0,1]$. Montrons par l'absurde que $\ell = 0$.
On suppose que $\ell \neq 0$. Donc $\ell \in]0,1]$. Donc $\ell > 0$.
Par définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = e^{-nx_n}$ $(*)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -nx_n = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$. Donc par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx_n} = 0$. Or cette limite est la limite de (x_n) d'après $(*)$. Donc elle doit être égale à $\ell > 0$. Nous aboutissons à une contradiction. $\boxed{\text{Nous en déduisons donc que } \ell = 0}$.