DM pour le mardi 11 mars.

Calculs.

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} x \sin(e^{-3x})$.
2. Déterminer un équivalent (le plus simple possible) en $+\infty$ de $x \mapsto \ln(1+x^2) - \sqrt{x}$.
   En déduire $\lim_{x \to +\infty} \ln(1+x^2) - \sqrt{x}$.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x} - \cos(x)$.
   En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \cos(x) - x}{x^3}$

Exercice.

Pour tout entier naturel non-nul n, on considère la fonction $f_n : x \mapsto e^{-nx} - x$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de f_n sur $[0,1]$. On résumera les résultats obtenus dans un tableau de variations où on indiquera les valeurs aux bornes de cet intervalle.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f_n établit une bijection de $[0,1]$ sur un ensemble à déterminer. En déduire qu'il existe un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
   On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **d'éléments de** $[0,1]$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) = f_n(x)e^{-x} + x(e^{-x} - 1)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente que $f_{n+1}(x_n) < 0$. Établir alors sans justifier le tableau de variation de f_{n+1} sur $[0,1]$ et y placer x_n et x_{n+1}.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
6. Montrer que cette suite est convergente.
7. On note ℓ sa limite. Montrer que $\ell \in [0,1]$.
8. Déterminer ℓ.