BCPST

1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 5

— 25 janvier 2025—

Exercice 1 – Calculs.

1. Soit $P = \mathbf{X}^4 - 4\mathbf{X} + 3$.
   (a) $P(1) = 0$ donc 1 est une racine de P.
   $P' = 4\mathbf{X}^3 - 4$ donc $P'(1) = 0$. Donc, $\boxed{\text{1 est une racine multiple de } P}$.
   (b) 1 est une racine multiple de P donc il existe un polynôme Q tel que $P(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}-1)^2 Q$.
   - $\deg(Q) = \deg(P) - 2 = 2$ donc $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Q(\mathbf{X}) = a\mathbf{X}^2 + b\mathbf{X} + c$.
   - En identifiant les coefficients dominant et constant, on peut en déduire que $a = 1$ et $c = 3$.
   - $P(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}-1)^2(\mathbf{X}^2 + b\mathbf{X} + 3) = \mathbf{X}^4 + (b-6)\mathbf{X} + 3$.
     Par identification, $b - 6 = -4$ donc $b = 2$.

   On en déduit que $P(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}-1)^2(\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 3)$.
   On factorise ensuite le polynôme Q. $\Delta = 4 - 12 = -8 = (2\sqrt{2}\mathbf{i})^2 < 0$.
   Q admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}\mathbf{i}}{2} = -1 - \sqrt{2}\mathbf{i}$ et $z_2 = -1 + \sqrt{2}\mathbf{i}$.
   Donc, dans $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$, $\boxed{P(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}-1)^2(\mathbf{X} + 1 + \sqrt{2}\mathbf{i})(\mathbf{X} + 1 - \sqrt{2}\mathbf{i})}$.
   Dans $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$, $\boxed{P(\mathbf{X}) = (\mathbf{X}-1)^2(\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 3)}$.
2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définie par
$$P_0(\mathbf{X}) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\mathbf{X}) = (2n+1)\mathbf{X}P_n(\mathbf{X}) - (\mathbf{X}^2+1)P_n'(\mathbf{X})$$
   (a) $P_1 = \mathbf{X}P_0 - (\mathbf{X}^2+1)P_0'$ donc $\boxed{P_1 = \mathbf{X}}$.
   $P_2 = 3\mathbf{X}P_1 - (\mathbf{X}^2+1)P_1' = 3\mathbf{X}^2 - (\mathbf{X}^2+1)$ donc $\boxed{P_2 = 2\mathbf{X}^2 - 1}$.
   $P_3 = 5\mathbf{X}P_2 - (\mathbf{X}^2+1)P_2' = 5\mathbf{X}(2\mathbf{X}^2-1) - (\mathbf{X}^2+1)4\mathbf{X}$ donc $\boxed{P_2 = 6\mathbf{X}^3 - 9\mathbf{X}}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On conjecture que $\boxed{\deg(P_n) = n \text{ et que le coefficient dominant de } P_n \text{ est } n!}$.
   (c) On raisonne par récurrence en posant
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n)$: "$\deg(P_n) = n$ le coefficient dominant de P_n est $n!$".
   - Initialisation.
     Pour $n = 0$: $P_0 = 1$. Donc, $\deg(P_0) = 0$ et son coefficient dominant est $1 = 0!$.
     Donc, $H(0)$ est vraie.
   - Hérédité.
     Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ soit vraie.
     Par hypothèse de récurrence, il existe deux polynômes Q_n tel que $P_n = n!X^n + Q_n$ et $\deg(Q_n) \leq n-1$.
     Donc, $P_{n+1} = (2n+1)\mathbf{X}P_n(\mathbf{X}) - (\mathbf{X}^2+1)P_n'(\mathbf{X}) = (2n+1)(n!\mathbf{X}^{n+1} + \mathbf{X}Q_n) - (\mathbf{X}^2+1)(n.n!\mathbf{X}^{n-1} + Q_n')$
     $= ((2n+1)n! - n.n!)\mathbf{X}^{n+1} + (2n+1)\mathbf{X}Q_n - \mathbf{X^2}Q_n' - n.n!\mathbf{X}^{n-1} - Q_n'$
     $= (n+1)n!\mathbf{X}^{n+1} + Q$ avec $\deg(Q) \leq \max(\deg(\mathbf{X}Q_n), \deg(\mathbf{X}^2Q_n'), \deg(Q_n'))$.
     Donc, $P_{n+1} = (n+1)n!\mathbf{X}^{n+1} + Q$ avec $\deg(Q) \leq n$.
     Donc, $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et son coefficient dominant est $(n+1)!$. Donc $H(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion.
     Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et le coefficient dominant de P_n est $n!$.

Exercice 2 – Géométrie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des points $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$(x + y + z + 1) + n(x - 5y + 4z - 2) = 0$$
On note également $\mathcal{P}_\infty$ l'ensemble défini par
$$\begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = -1 + s + 3t \\ z = -1 + s + 4t \end{cases},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2$$

1. Soient $\overrightarrow{u_1} = (1,1,1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (-1,3,4)$. Ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires donc on reconnait une représentation paramétrique du $\boxed{\text{plan passant par } A_\infty(1,-1,-1) \text{ et de vecteurs directeurs } \overrightarrow{u_1} \text{ et } \overrightarrow{u_2}.}$

2. On va chercher un vecteur $\overrightarrow{n}_\infty = (a,b,c)$ normal au plan $\mathcal{P}_\infty$.

$$\begin{cases} <\overrightarrow{n}_\infty, \overrightarrow{u_1}> &= 0 \\ <\overrightarrow{n}_\infty, \overrightarrow{u_2}> &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ -a+3b+4c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 4b+5c &= 0 \end{cases}$$

On peut prendre $\overrightarrow{n}_\infty = (1,-5,4)$. On en déduit une équation cartésienne de $\mathcal{P}_\infty$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{P}_\infty &\iff <\overrightarrow{A_\infty M}, \overrightarrow{n}_\infty>= 0 \\ &\iff < \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} >= 0 \\ &\iff x - 1 - 5(y+1) + 4(z+1) = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_\infty$ est $\boxed{x - 5y + 4z - 2 = 0}$.

3. $\mathcal{P}_0$ est un plan dont $\overrightarrow{n_0} = (1,1,1)$ est un vecteur normal.
$\overrightarrow{n_0}$ et $\overrightarrow{n_\infty}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_\infty$ ne sont pas parallèles. Leur intersection est donc une droite dont un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} x+y+z+1 &= 0 \\ x-5y+4z-2 &= 0 \end{cases}$$

On en déduit une représentation paramétrique.

$$\begin{cases} x+y+z+1 &= 0 \\ x-5y+4z-2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+t+1 &= 0 \\ -6y+3t-3 &= 0 \\ z = t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est $\boxed{\begin{cases} x &= \frac{-1}{2} - \frac{3}{2}t \\ y &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}t \\ z &= t \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'équation qui permet de décrire $\mathcal{P}_n$ peut se réécrire $(1+n)x + (1-5n)y + (1+4n)z + 1 - 2n = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{n_n} = (1+n, 1-5n, 1+4n)$ est non nul donc
$\boxed{\mathcal{P}_n \text{ est le plan passant par } A_n\left(0, 0, \frac{2n-1}{1+4n}\right) \text{ et de vecteur normal } \overrightarrow{n_n}.}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{D}$.
$M \in \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_\infty$ donc $x - 5y + 4z - 2 = 0$ et $x + y + z + 1 = 0$.
En particulier, $x + y + z + 1 + n(x - 5y + 4z - 2) = 0 + n.0 = 0$.
Donc $M \in \mathcal{P}_n$.
Donc, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_n$.
Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{D} \subset \mathcal{P}_n}$.

6. $H(x,y,z)$, le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}_\infty$, est l'unique solution du système (S) : $\begin{cases} H \in \mathcal{P}_\infty \\ <\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{u_1}>= 0 \\ <\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{u_2}>= 0 \end{cases}$.

$$(S) \iff \begin{cases} x - 5y + 4z - 2 = 0 \\ (x-1) + (y-2) + (z-3) = 0 \\ -(x-1) + 3(y-2) + 4(z-3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 5y + 4z - 2 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \\ -x + 3y + 4z - 17 = 0 \end{cases}$$

H est donc l'unique solution du système $\boxed{\begin{cases} x - 5y + 4z - 2 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \\ -x + 3y + 4z - 17 = 0 \end{cases}}$

Exercice 3 – Polynômes.

1. (a) On pose $P = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{C},\ P(x-1) = P(x) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{C},\ x\underbrace{P(x-1)}_{=0} = (x-2)\underbrace{P(x)}_{=0}$.

$\boxed{\text{Donc le polynôme nul est solution de } (E)}$.

(b) $P=\lambda X^n(X-1)^p$ donc $P(X-1)=\lambda(X-1)^n(X-2)^p$.

$$\begin{aligned}
XP(X-1)=(X-2)P(X) &\iff \lambda X(X-1)^n(X-2)^p=\lambda X^n(X-1)^p(X-2)\\
&\iff X(X-1)^n(X-2)^p=X^n(X-1)^p(X-2) \text{ (on a simplifié par } \lambda\neq 0)\\
&\iff n=1 \text{ et } n=p \text{ et } p=1 \text{ d'après le résultat admis}\\
&\iff n=p=1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\lambda X^n(X-1)^p \text{ est solution de } (E) \text{ si, et seulement si, } n=p=1.}$

(c) La réponse précédente ne permet pas d'en déduire l'ensemble des solutions de (E) car on n'a cherché que des solutions ayant une certaine forme. On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E). On peut seulement affirmer que l'ensemble :

$$\{\lambda X(X-1),\ \lambda\in\mathbb{C}\}\subset\mathcal{S}$$

2. (a) i. On suppose que $\alpha\neq 0$. D'après la relation vérifiée par P, $\alpha P(\alpha-1)=(\alpha-2)P(\alpha)$. Or $P(\alpha)=0$ donc $\alpha P(\alpha-1)=0$. Puisque $\alpha\neq 0$, on en déduit $P(\alpha-1)=0$, donc $\alpha-1$ est racine de P.

Ainsi, $\boxed{\text{Si } \alpha\neq 0, \text{ alors } \alpha-1 \text{ est une racine de } P.}$

ii. On suppose que P est non-nul. Montrons par l'absurde que P n'a pas de racine dans $]-\infty,0[$.
On suppose que P a une racine $\alpha\in]-\infty,0[$.
$\alpha\neq 0$ donc d'après la question 2(a)i, $\alpha-1$ est aussi racine, et $\alpha-1\neq 0$ (car $\alpha-1<-1$). Donc $\alpha-2$ est racine de P, et $\alpha-2\neq 0$. Etc. On montre ainsi, par récurrence immédiate que tous les $\alpha-n$ sont racines, pour $n\in\mathbb{N}$.
On obtient une infinité de racines de P. Donc P est le polynôme nul. Contradiction car on a supposé que $P\neq 0$. $\boxed{\text{On en déduit que si } P \text{ n'est pas le polynôme nul, } P \text{ n'a pas de racine dans }]-\infty,0[}$.

iii. On suppose que $\alpha\neq 1$.D'après la relation vérifiée par P appliquée à $\alpha+1$, $(\alpha+1)P(\alpha)=(\alpha-1)P(\alpha+1)$. Or $P(\alpha)=0$ donc $(\alpha-1)P(\alpha+1)=0$. Puisque $\alpha\neq 1$, on en déduit $\alpha-1\neq 0$, d'où $P(\alpha+1)=0$. Donc $\alpha+1$ est une racine de P.

Ainsi, $\boxed{\text{Si } \alpha\neq 1, \text{ alors } \alpha+1 \text{ est une racine de } P.}$

iv. On suppose que P est non-nul. Montrons par l'absurde que P n'a pas de racine dans $]1,+\infty[$.
On suppose que P admet une racine α appartenant à $]1,+\infty[$.
$\alpha>1$ donc $\alpha\neq 1$. Donc $\alpha+1$ est racine de P.
Puis $1<\alpha+1$ donc $\alpha+1\neq 1$. Donc, d'après le résultat de la question 2(a)iii, $\alpha+2$ est racine de P. De même, $\alpha+2\neq 1$ car $1<\alpha+2$ donc $\alpha+3$ est racine de P, etc. On peut montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha+n$ est racine de P.
Donc P admet une infinité de racines. Donc $P=0$. Contradiction car on a supposé que P était non-nul.
$\boxed{\text{On en déduit que si } P \text{ n'est pas le polynôme nul, il n'a pas de racine dans }]1,+\infty[.}$

(b) P n'est pas le polynôme nul donc d'après les questions précédentes, il n'a aucune racine dans $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

Montrons que P n'a pas de racine dans $]0,1[$. On suppose que P admet une racine α appartenant à $]0,1[$. Alors $\alpha-1$ est racine de P d'après la question 2(a)i, et $\alpha-1\in]-\infty,0[$. On obtient une contradiction car P est non-nul (il n'a pas de racine dans cet ensemble). Ainsi, P n'a pas de racine dans $]0,1[$.

Montrons que P n'a pas de racine dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. On suppose que P admet une racine α appartenant à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Alors, on montre de proche en proche que $\alpha-1$, $\alpha-2$... et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha-n$ sont racines de P (tous ces nombres complexes non-réels sont différent de 0 donc on applique de proche en proche le résultat obtenu à la question 2(a)i). Donc P admet une infinité de racines, donc $P=0$. Contradiction, donc P n'a pas de racine dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Conclusion : en regroupant tous les résultats obtenus, on constate que
$\boxed{\text{si } P\neq 0, \text{ les seules racines de } P \text{ sont } 0 \text{ et } 1}$.

(c) On en déduit que si P vérifie l'équation (E), alors soit il est nul, soit ses seules racines sont 0 et 1.
$\boxed{\text{Ainsi, si } P \text{ vérifie } (E), \text{ il est de la forme } \lambda X^n(X-1)^p \text{ , avec } \lambda\in\mathbb{C},\ n,p\in\mathbb{N}}$.

3. On vient de montrer que :

- Si P vérifie (E) alors il est de la forme $\lambda X^n(X-1)^p$, avec $\lambda\in\mathbb{C}$, $n,p\in\mathbb{N}$.

- Un polynôme de la forme $\lambda X^n(X-1)^p$ ($\lambda\in\mathbb{C}$, $n,p\in\mathbb{N}$) vérifie (E) ssi $\lambda=0$ ou $[\lambda\neq 0$ et $n=p=1]$.

On en déduit l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient l'équation (E) : $\boxed{\{\lambda X(X-1),\ \lambda\in\mathbb{C}\}}$.

Exercice 4 – Matrices.

1.

```python
def u(n):
    u,v,w=4,5,5
    for i in range(n):
        u,v,w=v,w,5*w-8*v+4*u
    return u
```

```python
def question_b(n):
    s=0
    for i in range(n+1):
        s=s+u(i)
    return s
```

```python
def question_c(n):
    n=2
    while u(n)>=-1000:
        n=n+1
    return n
```

2. (a) On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et on vérifie que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$.

   (b) Un raisonnement par récurrence donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0$.

3. On vérifie que

$$P \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} P = I_3,$$

ce qui prouve que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (a) Après calculs, on obtient $MP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 20 \end{pmatrix}$ et $T = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $T = D + N$.

   On vérifie que les matrices D et N commutent, ce qui permet d'appliquer la formule du binôme. Pour $n \in \mathbb{N}$, $T^n = (D+N)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$. Or $N^2 = 0_3$ donc pour tout entier $k \geqslant 2$, $N^k = 0_3$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T^n = \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nD^{n-1}N$.

   Par ailleurs, puisque D est une matrice diagonale, on peut exprimer aisément ses puissances :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ D^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix}$$

   On obtient ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ et on vérifie que cette formule est encore valable pour $n = 0$. Ainsi, elle est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) On part de l'égalité $T = P^{-1}MP$. En multipliant à gauche par P, et à droite par P^{-1} les deux membres de cette égalité, on obtient $M = PTP^{-1}$.

   (b) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PT^nP^{-1}$.

6. Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$. Donc d'après la formule précédente, $X_n = PT^nP^{-1}X_0$. Calculons ce produit en commençant par calculer : $P^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Puis :

$$T^n(P^{-1}X_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ (5-n)2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Enfin, il nous suffit de connaître la première ligne de la matrice colonne $P(T^nP^{-1}X_0)$, qui nous donnera u_n. On obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + (3-n)2^n.}$$