**Exercice 1** Dans chacune des expériences suivantes, déterminer $X(\Omega)$ et reconnaître la loi de $X$ (uniforme, bernoulli, binomiale). Préciser ses paramètres.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. $X$ est le nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires, et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. $X$ est le nombre de bosses.
3. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. $X$ est le nombre de cartes que l'on a retournées.
4. On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon et d'une fille sont identiques. $X$ est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
5. On suppose que 1 pour cent des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. $X$ est le nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Correction

1. $X(\Omega) = [\![0, 20]\!]$.
   Chacun des 20 objets est dans le premier tiroir avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et on compte le nombre de fois où "être dans le tiroir" est obtenu.
   Donc, $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètre } 20 \text{ et } \frac{1}{3}.}$
2. $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$. On choisit au hasard un animal à 0, 1 ou 2 bosses donc $\boxed{X \text{ suit une loi uniforme sur } [\![0, 2]\!].}$
3. $X(\Omega) = [\![1, 32]\!]$. $X$ représente la position de la carte dans le paquet de carte.
   Donc, $\boxed{X \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1, 32]\!].}$
4. $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
   Chacun des 3 enfants est un garçon avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et on compte le nombre de fois où "être un garçon" est obtenu.
   Donc, $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètre } 3 \text{ et } \frac{1}{2}.}$
5. $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.
   Chacun des 100 trèfles possède 4 feuilles avec une probabilité $\frac{1}{100}$ et on compte le nombre de fois où "avoir 4 feuilles" est obtenu.
   Donc, $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètre } 100 \text{ et } \frac{1}{100}.}$

**Exercice 2**
Un joueur lance deux fois de suite un dé à six faces numérotées de 1 à 6.
Soit $X$ la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du second lancer.

1. Déterminer les lois de $X$, $|X|$, $X^2$.
2. Calculer l'espérance et la variance des lois $X$ et $|X|$.

Correction
Soit $X$ la variable aléatoire égale à la

$$X : \begin{cases} \Omega = [\![1, 6]\!]^2 \to X(\Omega) \\ (i, j) \mapsto i - j \end{cases}$$

1. (a) La loi de $X$ est la donnée de $X(\Omega) = [\![-5, 5]\!]$ et de
   - $P(X = -5) = P(X = 5) = \frac{1}{36}$.
   - $P(X = -4) = P(X = 4) = \frac{2}{36}$.

- $P(X=-3)=P(X=3)=\dfrac{3}{36}$.
- $P(X=-2)=P(X=2)=\dfrac{4}{36}$.
- $P(X=-1)=P(X=1)=\dfrac{5}{36}$.
- $P(X=0)=\dfrac{6}{36}$.

(b) La loi de $|X|$ est la donnée de $|X|(\Omega)=[\![0,5]\!]$ et de

- $P(|X|=5)=\dfrac{2}{36}$.
- $P(|X|=4)=\dfrac{4}{36}$.
- $P(|X|=3)=\dfrac{6}{36}$.
- $P(|X|=2)=\dfrac{8}{36}$.
- $P(|X|=1)=\dfrac{10}{36}$.
- $P(|X|=0)=\dfrac{6}{36}$.

(c) La loi de $X^2$ est la donnée de $X^2(\Omega)=\{0,1,4,9,16,25\}$ et de

- $P(X^2=25)=\dfrac{2}{36}$.
- $P(X^2=16)=\dfrac{4}{36}$.
- $P(X^2=9)=\dfrac{6}{36}$.
- $P(X^2=4)=\dfrac{8}{36}$.
- $P(X^2=1)=\dfrac{10}{36}$.
- $P(X^2=0)=\dfrac{6}{36}$.

2. On a
$$E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)=0$$
et
$$V(X)=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)=\sum_{\mathrm{x}\in\mathrm{X}(\Omega)}\mathrm{x}^2\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})=\frac{1}{36}(25\times 2+16\times 4+9\times 6+4\times 8+1\times 10)=\frac{202}{36}=\frac{101}{18}.$$
On a
$$E(|X|)=\sum_{y\in|X|(\Omega)} yP(|X|=y)=\frac{1}{36}(5\times 2+4\times 4+3\times 6+2\times 8+1\times 10)=\frac{70}{36}=\frac{35}{18}$$
et
$$V(|X|)=E(|X|^2)-E(|X|)^2=\frac{101}{18}-\left(\frac{35}{18}\right)^2=\frac{593}{324}.$$

**Exercice 3** Un jugement est soumis au vote d'un jury de 12 membres. Ce jugement doit être voté à la majorité des deux tiers pour devenir exécutoire. Les jurés ont le choix entre deux décisions $A$ et $B$. Il se déterminent indépendamment les uns des autres et la probabilité de choisir la décision $A$ est $\theta$ pour chacun d'eux.

1. Soit $X$ le nombre de jurés prenant la décision $A$. Déterminer la loi de $X$.

2. Quelle est la probabilité que la décision $A$ soit adoptée par le jury ?

Correction

1. $X$ permet de compter, parmi les 12 jurés, combien prennent la décision $A$.
   Donc, $\boxed{X \text{ suite une loi binomiale de paramètres } 12 \text{ et } \theta.}$
2. Le décision est acceptée lorsque $X \geq 8$.

$$P(X \geq 8) = \sum_{k=8}^{12} \binom{12}{k} \theta^k (1-\theta)^{12-k}$$

**Exercice 4** Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, ..., N, ...$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ elle se trouve à la case 0. On note $X_n$ le numéro de la case occupée par la puce après $n$ sauts et $Y_n$ le nombre de fois où elle a sauté d'une seule case au cours des $n$ premiers sauts.

1. Déterminer la loi de $X_1$, puis son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de $Y_n$, puis son espérance et sa variance.
3. Exprimer $X_n$ en fonction de $Y_n$ et en déduire la loi de $X_n$ puis son espérance et sa variance.

Correction

1. $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. Le choix entre 1 et 2 est fait aléatoirement donc $X$ suit une loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Donc, $E(X_1) = \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $V(X) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \frac{1}{2} + 4.\frac{1}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$.
2. $Y_n$ compte le nombre de fois où le saut a été de 1 case. Donc, $Y_n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $\frac{1}{2}$. Donc, $E(Y_n) = \frac{n}{2}$ et $\mathrm{Ver}(Y_n) = \frac{n}{4}$.
3. $X_n(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$. Parmi les $n$ sauts que fait la puce,
   - elle fait $Y_n$ saut de 1 case, ce qui la fait avancer de $Y_n$ cases.
   - elle fait $n - Y_n$ saut de 2 cases, ce qui la fait avancer de $2(n - Y_n)$ cases.

   Finalement, $X_n = Y_n + 2(n - Y_n) = 2n - Y_n$.

   $$\forall k \in [\![n, 2n]\!],\ P(X_n = k) = P(Y_n = 2n - k) = \binom{n}{2n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-(2n-k)} = \binom{n}{2n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

   Par les règles de calculs sur l'espérance et la variance, $E(X_n) = 2n - E(Y_n) = \frac{3n}{2}$ et $V(Y_n) = (-1)^2 V(Y_n) = \frac{n}{4}$.

**Exercice 5** Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de $X$ sont affichés sur un compteur détraqué :

- si $X \neq 0$, le compteur affiche $X$.
- Si $X = 0$, le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 et $n$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y$ égale au nombre affiché sur le compteur.
   On pourra commencer par $P(Y = 1)$.
2. Préciser $E(Y)$ et vérifier que $E(Y) \geq E(X)$.

Correction

1. $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On note $U$ la variable aléatoire qui vaut le chiffre choisie au hasard lorsque le tirage a lieu.

$$\begin{aligned}(Y = k) &= (X = k) \cup (X = 0 \cap U = k) \text{ union disjointe}\\ P(Y = k) &= P(X = k) + P(U = k | X = 0) P(X = 0)\end{aligned}$$

Or, sachant $(X = 0)$, $U$ suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ donc

$$\begin{aligned}(Y = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{1}{n}\binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0}\\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{(1-p)^n}{n}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \frac{(1-p)^n}{n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{(1-p)^n}{n}\\ &= E(X) + \frac{(1-p)^n}{n}.\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

En particulier, $E(Y) \geq E(X)$.

**Exercice 6** Soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X = k) = \lambda k.$$

Déterminer $\lambda$, $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Correction Il faut que $\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1$, donc il faut que

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} k = 1\,,\ \text{i.e. } \lambda = \frac{2}{n(n+1)}\,.$$

On a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} k^2 = \lambda \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}\,.$$

De plus

$$\begin{aligned}V(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) - \left(\frac{2n+1}{3}\right)^2\\ &= \lambda\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{4n^2+4n+1}{9}\\ &= \frac{9n^2+9n-8n^2-8n-2}{18}\\ &= \frac{n^2+n-2}{18} = \frac{(n-1)(n+2)}{18}\,.\end{aligned}$$

**Exercice 7 Simulations de variables aléatoires réelle**

1. Rappeler le moyen de simuler une loi de Bernoulli de paramètre $p$.
2. Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs tels que $a \leq b$, et soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
   (a) Déterminer $\mu$ et $n$ tels que la variable aléatoire $Y = X + \mu$ suive la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
   (b) En déduire $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Correction

1. On choisir un nombre au hasard $U$ dans $[0, 1]$.
   Si $U \leq p$, on pose $X = 1$. Sinon, on pose $X = 0$.
   Alors, $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$.
2. Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs tels que $a \leq b$, et soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
   (a) La variable aléatoire $X - a + 1$ suit une loi uniforme sur $[\![1, b - a + 1]\!]$.
   Donc, en posant $\mu = -a + 1$ et $n = b - a + 1$, la variable aléatoire $Y = X + \mu$ suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
   (b) On a $E(X) = E(Y) - \mu = \dfrac{n+1}{2} - \mu = \dfrac{b-a+2}{2} + a - 1 = \dfrac{b+a}{2}$.
   De plus, $V(X) = V(Y) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

**Exercice 8 Problème des rencontres**

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On les extrait successivement sans remise.
On dit qu'il y a rencontre au $i$-ème tirage si la $i$-ème boule tirée porte le numéro $i$.

1. Déterminer la probabilité d'une rencontre au premier tirage.
2. Déterminer la probabilité d'une rencontre au second tirage.
3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, calculer la probabilité qu'il y ait rencontre au $i-$ème tirage.
   *On pourra penser aux permutations de l'ensemble* $[\![1, n]\!]$.
4. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de rencontres. Déterminer $\mathrm{E}(X)$.
   *on pourra décomposer $X$ en somme de variables de Bernoulli.*

Correction

1. On note $X_1$ la variable aléatoire dont la valeur est le numéro de la boule piochée au 1er tirage.
   Il y a rencontre au premier tirage lorsque $X_1 = 1$.
   Or, $X_1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$ donc la probabilité d'une rencontre au premier tirage vaut $\boxed{\dfrac{1}{n}}$.
2. On note $X_2$ la variable aléatoire dont la valeur est le numéro de la boule piochée au 2nd tirage.
   Il y a rencontre au deuxième tirage lorsque $X_2 = 2$.
$$P(X_2 = 2) = P(X_2 = 2 | X_1 \neq 1) P(X_1 \neq 1) = \frac{1}{n-1} . \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$
   La probabilité d'une rencontre au deuxième tirage vaut $\boxed{\dfrac{1}{n}}$.
3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la probabilité qu'il y ait rencontre au $i-$ème tirage est égale à
$$\frac{\text{nombre de tirage où il y a rencontre au } i\text{-ème tirage}}{\text{nombre de tirage total}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

4. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, posons $Y_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a rencontre au $i$-ème tirage et 0 sinon. D'après 1), $Y_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

   Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de rencontres. On a $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, d'où

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = 1\,.$$

   Le nombre moyen de rencontre est égal à 1.

**Exercice 9** Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires.
On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.
On note $X_1$ (respectivement $X_2$) la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier tirage (respectivement le second tirage) amène une boule blanche, 0 sinon.

1. Déterminer la loi de $X_1$ et celle de $X_2$.
2. Soit $k \in X_1(\Omega)$. Déterminer, à partir de l'énoncé, $P(X_2 = 0|X_1 = k)$ et $P(X_2 = 1|X_1 = k)$.
3. En déduire la loi du couple $(X_1, X_2)$.
4. Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?

Correction

1. On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, $P(X_1 = 0) = \frac{5}{8}$ et $P(X_1 = 1) = \frac{3}{8}$.
   On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\begin{array}{rcl} P(X_2 = 0) & = & P(X_2 = 0 \cap X_1 = 0) + P(X_2 = 0 \cap X_1 = 1) \\ & = & P(X_2 = 0|X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0|X_1 = 1)P(X_1 = 1) \\ & = & \frac{5}{8}.\frac{4}{7} + \frac{3}{8}.\frac{5}{7} = \frac{5}{8} \end{array}$$

   et $P(X_2 = 1) = \frac{3}{8}$.
2. On a $P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \frac{4}{7}$ et $P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \frac{3}{7}$.
   On a $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{5}{7}$ et $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \frac{2}{7}$.
3. D'où :
   $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \frac{20}{56}$,

   $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \frac{15}{56}$,

   $P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \frac{15}{56}$,

   $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \frac{6}{56}$,
4. Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ ne sont pas indépendantes. En effet,

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{28} \neq \frac{9}{64} = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)\,.$$

**Exercice 10** Soit un entier $n \geq 2$.
On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$.

Dans l'urne numéro $k$, il y a $k$ boules numérotées de 1 à $k$.
On choisit une urne au hasard puis dans celle-ci, on pioche une boule au hasard.
On note $X$ la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie, et $Y$ la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de $X$ ?
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $j \in [\![1, i]\!]$. Déterminer, à partir de l'énoncé, $P(Y = j | X = i)$.
3. En déduire la loi du couple $(X, Y)$, puis la loi de $X$ et celle de $Y$.
   *(on exprimera certaines probabilités sous forme de sommes).*
4. Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$.

Correction

1. On a $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(X = i) = \dfrac{1}{n}$.
2. On a $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $P(Y = j | X = i) = \dfrac{1}{i}$.
3. On a donc $P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{in} \text{ si } 1 \leq j \leq i \leq n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
   D'où, pour tout $i \in X(\Omega)$, $P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} P(X = i, Y = j) = \frac{1}{n}$.
   D'où, pour tout $j \in Y(\Omega)$, $P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} P(X = i, Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}$.
4. $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i P(X = i) = \frac{n+1}{2}$.
   $\mathrm{E}(Y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j P(Y = j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2}$
   $= \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n(n+1)}{4} + \dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{n+1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{n+3}{4}$.

**Exercice 11** On lance $n$ fois une pièce non truquée. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $X_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce donne pile et 0 sinon.
On note $F_n$ la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de "pile" au cours des $n$ expériences.

1. Exprimer $F_n$ en fonction de $X_1, \ldots, X_n$.
2. Calculer $\mathrm{E}(F_n)$ et $\mathrm{V}(F_n)$.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier naturel $n_0$ tel que pour tout $n$ supérieur à $n_0$, on ait $P\left(0,49 < F_n < 0,51\right) \geq 95\%$ (on dit alors que $]0,49 ; 0,51[$ est un intervalle de fluctuation de $F_n$ au seuil de 95%).

Correction

1. On a $F_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. $E(F_n) = \dfrac{1}{n} E\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{1}{2}$ et $V(F_n) = \dfrac{1}{n^2} V\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{1}{4n}$.
3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(F_n)}{\varepsilon^2},$$

donc, pour $\varepsilon = 0,01$,

$$P(|F_n - 0,5| \geq 0,01) \leq \frac{1}{4n \times 0,01^2}\,,$$

d'où,

$$P\left(0,49 < F_n < 0,51\right) \geq 1 - \frac{10^4}{4n}\,.$$

Afin que l'on ait $P\left(0,49 < F_n < 0,51\right) \geq 95\%$, il faut que $1 - \dfrac{10^4}{4n} \geq 0,95$, i.e.,

$$n \geq \frac{10^4}{0,2} = 5 \times 10^4\,.$$