Corrigé du devoir surveillé n° 6

— 15 mars 2025—

Exercice 1 – Calculs.

1. Par somme de DL puis équivalent, on obtient $\dfrac{e^x - \tan x - 1}{\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \tan x - 1}{\sin x} = 0.}$

2. On va calculer le développement limité du dénominateur à l'ordre 4.

$$e^x - x\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - 1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

En divisant pas x^2, on obtient $\boxed{\dfrac{e^x - x\cos x - 1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{x^2}{4} + o(x^2)}$.

3. On a $\lim\limits_{x\to 0} -2x = 0$ donc, par substitution,

$$\cos(x)\sqrt{1-2x} = (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))(1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = 1 - x - x^2 + o(x^2).$$

La tangente à la courbe de f en 0 a pour équation $\boxed{y = 1 - x}$.

$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est en dessous de la tangente au voisine de } 0}$ car $-x^2 < 0$.

Exercice 2 – Informatique.

1. Il y a deux manières de parcourir la liste L, d'où deux réponses possibles :

```python
def appartient(x,L):
    for y in L:
        if x == y:
            return True
    return False
```

```python
def appartient(x,L):
    n = len(L)
    for i in range(n):
        if x == L[i]:
            return True
    return False
```

2.

```python
def nbVrai(L):
    compte = 0
    for x in L:
        if x == True:
            compte = compte + 1
    return compte
```

Problème 1

PARTIE 1 : Étude de la fonction sinus hyperbolique

1. Les fonctions sh et ch sont des combinaisons linéaires de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) \text{ et } \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbf{e}^{x} > 0$ et $\mathbf{e}^{-x} > 0$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > 0}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathrm{sh}(-x) = \dfrac{\mathbf{e}^{-x} - \mathbf{e}^{x}}{2} = -\dfrac{\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{-x}}{2} = -\ \mathrm{sh}(x)$. Donc $\boxed{\text{la fonction sh est impaire}}$.

4. La dérivée de sh est strictement positive sur $\mathbb{R}$donc $\boxed{\text{la fonction sh est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.
   Par somme de limite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$. Par parité, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$.
   D'où le tableau de variations suivant

x	$-\infty$ $+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$	$+$
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathbf{e}^{x}}{2}\left(1 - \mathbf{e}^{-2x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \mathbf{e}^{-2x} = 1$ donc $\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{e}^{x}}{2}}$.

   $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ donc, par substitution, $\mathrm{sh}(-x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{e}^{-x}}{2}$.

   Or, $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$ donc $\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} \dfrac{-\mathbf{e}^{-x}}{2}}$.

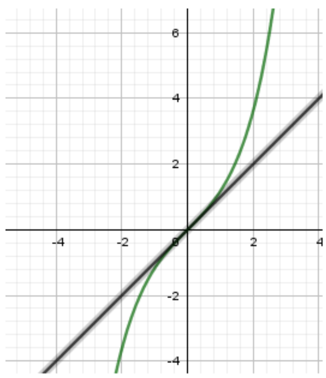
6. $\mathbf{e}^{x} \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$. Par substitution, $\mathbf{e}^{-x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

   Finalement, par somme, $\boxed{\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}$.

7. La fonction sh admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par $\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$ donc la courbe représentative de sh admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation $y = x$

8. $\mathrm{sh}(x) - x = \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc $\mathrm{sh}(x) - x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$.
   La courbe de sh est en dessous de la tangente pour $x < 0$ et au dessus pour $x > 0$.

9. On obtient le graphe suivant.



PARTIE 2 : Étude d'une fonction.

1. La fonction f est un quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{x\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{x^2}}$$

2. (a) D'après la question précédente, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}}$.

(b) La fonction g est une somme de produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \text{ch}(x) + x\text{sh}(x) - \text{ch}(x) = x\text{sh}(x)$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $g(0) = 0$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) > 0}$.

(c) f' est du signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Par quotient d'équivalent, $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathbf{e}^x}{2x}}$.
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

4. On utilise le développement limité de sh obtenu dans la partie précédente.
$\boxed{f(x) \underset{x\to0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)}$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1}$.

5. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$. Le prolongement, $\tilde{f}$, est défini par

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 1 \text{ pour } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Problème – Suites.

Partie I. Existence des racines de (E_n).

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{x+1}{x} > 0$. Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.
De plus, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème de la bijection,
$\boxed{f \text{ est bijective de } \mathbb{R}_+^* \text{ sur } \left]\lim\limits_{x\to0} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}.}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \in \mathbb{R}$ donc, par définition d'une bijection,
$\boxed{\text{l'équation } (E_n) \text{ a une unique solution } x_n \in \mathbb{R}_+^*.}$

4. On a $f(1) = \ln(1) + 1 = 1$ donc, par unicité de la solution de l'équation (E_1), $\boxed{x_1 = 1}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}_*$. $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$. Donc, par stricte monotnie de f sur $\mathbb{R}_+^*$, $x_n < x_{n+1}$
On en déduit que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$

Partie II. Etude de la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln(x) - x$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$ qui est du signe de $1 - x$. Le maximum de g est atteint en 1.
Le maximum de g est $g(1) = -1 < 0$ donc $\forall x > 0,\ g(x) < 0$ autrement dit $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x < x.}$

2. $f\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ et $f(n) = \ln(n) + n \geq n$ car $n \geq 1$ donc $f\left(\frac{n}{2}\right) \leq f(x_n) \leq f(n)$.
Or, f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n}$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2} = +\infty$ donc, par théorème de minoration, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty.}$

Partie III. Comportement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. (a) Comme la fonction ln est croissante, l'encadrement précédent donne $\dfrac{\ln\left(\frac{n}{2}\right)}{n} \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.

   Or, $\dfrac{\ln\left(\frac{n}{2}\right)}{n} = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{\ln(2)}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{n}{2}\right)}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée.

   Donc, par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0}$.

   (b) On réutilise alors la relation de définition de x_n : $\ln(x_n) + x_n = n$ d'où $\dfrac{x_n}{n} = 1 - \dfrac{\ln(x_n)}{n}$.

   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$ et on a donc $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.}$

2. (a) Comme la fonction ln est croissante, l'encadrement de la partie I donne $\dfrac{\ln\left(\frac{n}{2}\right)}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(n)}$.

   Or, $\dfrac{\ln\left(\frac{n}{2}\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)}{\ln(n)} - \dfrac{\ln(2)}{\ln(n)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{n}{2}\right)}{\ln(n)} = 1$. Donc, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{\ln(n)} = 1$. Donc, $\boxed{\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

   (b) On déduit de la question précédente que $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + o(\ln(n))$.

   Or, $\ln(x_n) = n - x_n$ donc $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n))}$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln n}$.

   (a) Soit $n > 1$. $u_n - 1 = \dfrac{n - x_n}{\ln n} - 1 = \dfrac{n - x_n - \ln(n)}{\ln n} = \dfrac{n - n + \ln(x_n) - \ln(n)}{\ln n} = \dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}$ Donc,

   $$\boxed{\forall n > 1, u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}}$$

   (b) $\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{x_n}{n} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x_n}{n} - 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x_n}{n} - 1\right) = 0$.

   Or, $\dfrac{x_n}{n} - 1 = \dfrac{x_n - n}{n} = \dfrac{-\ln(x_n)}{n}$. Donc, $\boxed{u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln(x_n)}{n\ln(n)}}$.

   Donc, en reprenant l'égalité du (a),

   $$n(1 - u_n) = -n\frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x_n)}{\ln n}$$

   Or, $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc, $\boxed{1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}}$

4. En utilisant l'équivalent de la question précédente, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Donc, $\dfrac{n - x_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Donc, $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}$.