Devoir Surveillé n°6

Samedi 15 mars 2025

– Suites, Limites, Équivalents, DL –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions devront être soulignées ou encadrées.

N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 – Calculs.

1. Déterminer la limite de $\dfrac{e^x - \tan x - 1}{\sin x}$ en 0.
2. Déterminer le développement limité de $\dfrac{e^x - x\cos x - 1}{x^2}$ en 0 à l'ordre 2.
3. Soit $f(x) = \cos(x)\sqrt{1-2x}$. Déterminer la tangente à la courbe de f en 0 et sa position par rapport à la courbe.

Exercice 2 – Informatique.

1. Écrire une fonction `appartient(x,L)` qui prend en entrée une liste `L` et un élément `x` et qui renvoie un booléen : `True` si `x` est dans `L` et `False` sinon.
2. On considère des listes de booléens, par exemple les listes [`True`,`False` ,`True`] et [`False`,`False`].
   Ecrire une fonction `nb_vrai` prenant en entrée une liste de booléens et renvoyant le nombre d'occurrences de la valeur `True`.

Exercice 3 – Etude de fonctions.

Dans tout ce problème, on notera sh et ch les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2}$$

Partie 1 : Étude de la fonction sinus hyperbolique

1. Montrer que les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées en fonction de sh et ch.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) > 0$.
3. Étudier la parité de sh.
4. Déterminer un équivalent de sh en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. En déduire les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de sh en 0.
7. Montrer que la courbe représentative de sh admet au point d'abscisse 0 une tangente dont on précisera l'équation.
8. Donner la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage du point d'abscisse 0.
9. Tracer l'allure de la courbe représentative de sh dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Partie 2. Étude d'une fonction.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. **Étude du signe de f' sur $\mathbb{R}_+^*$:**
   (a) On pose $g : x \mapsto x\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$. Donner un lien entre f' et g.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) > 0$.
   (c) En déduire le signe de f' et les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
5. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, définir correctement le prolongement.

Problème – Suites.

On désigne par n un entier naturel non nul, et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation

$$(\mathrm{E}_n) : \ln x + x = n$$

A cet effet, on introduit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \ln x + x$$

Partie I. Existence des racines de (E_n).

1. Déterminer les variations de la fonction f ainsi que les limites aux bords de son ensemble de définition.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, (E_n) admet une racine et une seule x_n.
4. Donner la valeur de x_1.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Partie II. Etude de la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que :$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x < x$.
2. Prouver que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$.
3. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Partie III. Comportement asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. (a) Montrer que $\left(\dfrac{\ln(x_n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
2. (a) Montrer que $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
   (b) En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + o(\ln(n))$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln n}$.
   (a) Montrer que$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{x_n}{n}\right)}{\ln n}$.
   (b) En déduire que $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln(x_n)}{n\ln(n)}$ puis que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
4. Montrer finalement que
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$