Exercice 1 Montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle sur  $\mathbb{R}$ .

Correction Soit P un polynôme de degré impair.

On a donc  $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ .

En particulier :  $\exists A < 0$  tel que  $\forall x \leq A, P(x) \leq -2$ . Donc, P(A) < 0.

De même,  $\exists B > 0$  tel que  $\forall x \geq B, P(x) \geq 2$ . Donc, P(B) > 0.

Le polynôme P est continue sur [A, B] donc, par le théorème des valeurs intermédiaires,  $\exists c \in [A, B]$  tel que P(c) = 0.

Donc, P admet une racine réelle.

**Exercice** 2 Soit la fonction f définie sur ]0,1[ par  $\forall x \in ]0,1[$  ,  $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$ .

- 1. Montrer que f est bijective de ]0,1[ dans un intervalle J à préciser. On note  $f^{-1}$  sa bijection réciproque.
- 2. Déterminer  $\lim_{n \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ .

#### Correction

- 1. On va montrer que la fonction f est une fonction continue et strictement monotone sur ]0;1[.
  - (a) Continuité: La fonction f est la somme de deux fonctions continue sur ]0;1[ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas.
  - (b) Stricte monotonie: La fonction f est dérivable sur ]0;1[ et  $\forall x \in ]0;1[$ ,  $f'(x)=\frac{-2x^2+2x-1}{(x(x-1))^2}$ .

Ce trinôme n'a pas de racines réelles donc la fonction f est strictement décroissante sur ]0;1[.

La fonction f est donc une bijection de ]0;1[ dans  $f(]0;1[)=]\lim_{x\to 1^-}f(x);\lim_{x\to 0^+}f(x)]=]-\infty;+\infty[$ 

2. On n'a pas besoin de l'expression de  $f^{-1}$  pour déterminer la limite, seulement de la continuité de  $f^{-1}$ . Or, la fonction f est continue sur ]0;1[ donc la bijection réciproque  $f^{-1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier,  $\lim_{y\to 0} f^{-1}(y) = f^{-1}(0)$ .

Par composition de limite,  $\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = f^{-1}(0)$ .

On résout l'équation f(x) = 0 d'inconnue  $x \in ]0;1[$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x(x - 1)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

D'où 
$$\lim_{n \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$$
.

**Exercice** 3 Soit  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(2x) = f(x).$$

- 1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ .
- 2. En déduire que f est constante sur  $\mathbb{R}$ .

#### Correction

1. On va le démontrer par récurrence en posant  $\forall n \in \mathbb{N}, \ P(n) : "\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ ."

**I**: Soit 
$$x \in \mathbb{R}$$
.  $f(x) = f\left(\frac{x}{1}\right) = f\left(\frac{x}{2^0}\right)$ . La propriété est vraie au rang 0.

 $\mathbf{H}$ : Supposons qu'il existe un entier  $n\geq 0$  tel que P(n) soit vraie.

Soit 
$$x \in \mathbb{R}$$
.  $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{2}}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$  par hypothèse de récurrence appliquée à  $\frac{x}{2}$ .

Or, 
$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f(x)$$
 par hypothèse sur  $f$  donc on a bien  $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$ .

**C**: Par le principe de récurrence, 
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
.

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On s'intéresse à la suite  $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Cette suite est une suite constante égale à f(x) par la question précédente.

De plus, 
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}=0$$
 et la fonction  $f$  est continue en 0. Donc,  $\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0)$ .

Par unicité de la limite, f(x) = f(0). Ceci est vrai pour tous les réels donc la fonction f est constante sur  $\mathbb{R}$ 

Exercice  $\underline{4}$  [\*] Soit f une fonction continue et périodique sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que f est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Correction Notons T une période de f. On a donc  $f(\mathbb{R}) = f([0;T])$ .

La fonction f est continue sur le segment [0,T] donc elle y est bornée.

 $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in [0, T], \ |f(x)| \le M.$ 

Donc,  $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq M$ . Donc, f est bornée sur  $\mathbb{R}$ 

**Exercice** 5 Soit f la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = -x^2 + x \ln x + 2$ .

- 1. Justifier que f est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Est-elle prolongeable par continuité en 0?
- 2. Dresser le tableau de variation de f (on pourra calculer les dérivées f' et f''). Préciser les limites en 0 et  $+\infty$ .
- 3. Montrer que f réalise une bijection de  $]0,+\infty[$  sur un intervalle que l'on précisera.
- 4. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque  $f^{-1}$ . Indiquer les limites.
- 5. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Justifier qu'il existe un unique réel strictement positif  $x_k$  tel que  $f(x_k) = -k$ . Exprimer  $x_k$  à l'aide de la fonction  $f^{-1}$ .
- 6. Montrer que la suite  $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$  est strictement croissante et déterminer sa limite.
- 7. Déterminer un équivalent de  $x_k$  en  $+\infty$ .

# Correction

1. La fonction f est une somme de produit de fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc f est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ 

Par croissance comparée,  $\lim_{x\to 0^+} x \ln(x) = 0$  donc  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ .

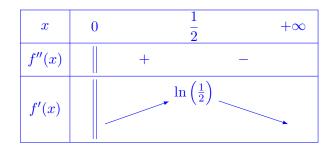
Donc, fbox f est prolongeable par continuité en 0 en posant f(0) = 2.

2. La fonction f est une somme de produit de fonctions deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc f est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f'(x) = -2x + \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = -2x + \ln(x) + 1 \text{ et } f''(x) = -2 + \frac{1}{x}$$

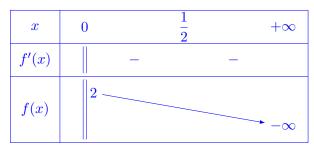
On étudie le signe de f''.  $\forall x > 0$ ,  $f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2}$ .

Donc, f' est croissante sur  $\left]0, \frac{1}{2}\right]$  et décroissante sur  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .



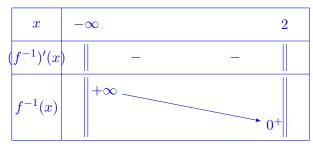
De plus,  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$  donc f' est négative sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donc, |f| est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .



De plus,  $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} -x^2$  donc  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ .

- 3. La fonction f est continue et strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc elle réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  dans  $f(\mathbb{R}_+^*) = \lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to 0^+} f(x) = ]-\infty, 2[.$
- 4. La bijection réciproque  $f^{-1}$  est définie sur  $]-\infty, 2[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et elle a la même monotonie que f.



- 5. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .  $-k \in f(\mathbb{R}_+^*)$  et f est bijective donc -k admet un unique antécédent dans  $\mathbb{R}_+^*$  par fDonc, il existe un unique réel strictement positif  $x_k$  tel que  $f(x_k) = -k$ . On a  $x_k = f^{-1}(-k)$ .
- 6. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

 $-(k+1)<-k \text{ donc } f^{-1}(-(k+1))>f^{-1}(-k) \text{ car } f^{-1} \text{ est décroissante sur }]-\infty,2[.$ 

Donc,  $x_{k+1} > x_k$ .

Donc, la suite  $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$  est strictement croissante.

 $\lim_{k \to +\infty} -k = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = +\infty \text{ donc, par composition, } \lim_{k \to +\infty} x_k = \lim_{k \to +\infty} f^{-1}(-k) = +\infty$ 7. On sait que  $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} -x^2$ . Or,  $\lim_{k \to +\infty} x_k = +\infty$  donc, par substitution,  $f(x_k) \underset{k \to +\infty}{\sim} -x_k^2$ .

Finalement,  $-k \underset{k \to +\infty}{\sim} -x_k^2$ . Donc,  $x_k \underset{k \to +\infty}{\sim} \sqrt{k}$ .

### Exercice 6

- 1. Soit h la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $h(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ .
  - (a) Est-elle prolongeable par continuité en 0 à gauche?
  - (b) Est-elle prolongeable par continuité à droite en 0?

- (c) Est-elle prolongeable par continuité en 0?
- 2. \* Résoudre  $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$ .

  Indication: Sur le bon ensemble,  $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 \tan(a) + \cot(b)}$ .

## Correction

1. On calcule les limites à gauche et à droite de 0.  $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}. \text{ Donc, } \lim_{x \to 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}.$   $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}. \text{ Donc, } \lim_{x \to 0^-} h(x) = -\frac{\pi}{2}.$ 

Les limites à gauche et à droite ne sont pas les mêmes donc h n'est pas prolongeable par continuité en 0

2. Cette équation est définie sur  $\mathbb{R}$  car la fonction arctangente est définie sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(E): \arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \tan(\arctan(x) + \arctan(2x)) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(2x))}{1 - \tan(\arctan(x)) \tan(\arctan(2x))} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \\ 3x = 1 - 2x^2 \\ 1 - 2x^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \\ 2x^2 + 3x - 1 = 0(\text{trinôme}) \\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } x \neq \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

On résout le trinôme. On trouve deux racines rélles  $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$  et  $\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ . Ces deux racines étant différentes de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ , on obtient :

(E) 
$$\iff$$
 
$$\begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in ]0, \frac{\pi}{2}[, \\ x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ ou } x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Or:  $\frac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0 \text{ et la fonction arctangente est négative sur } \mathbb{R}_-, \text{ donc si } x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \text{ alors }$   $\arctan(x) + \arctan(2x) \le 0, \text{ n'appartient donc pas à l'ensemble } ]0, \frac{\pi}{2} [\text{. Donc } \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \text{ n'est pas solution de } (E).$ 

•  $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$  donc  $4 < \sqrt{17} < 5$ , donc  $\frac{1}{4} < \frac{-3+\sqrt{17}}{4} < \frac{1}{2}$ . En particulier, on a :  $0 < \frac{-3+\sqrt{17}}{4} < 1$  et  $0 < 2\frac{-3+\sqrt{17}}{4} < 1$ . Donc, puisque la fonction arctangente est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , et puisque  $\arctan(0) = 0$  et  $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ,

si  $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ , on a  $0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{4}$  et  $0 < \arctan(2x) < \frac{\pi}{4}$ , donc  $\arctan(x) + \arctan(2x) \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . Ainsi,

$$(E) \iff x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc le singleton :  $S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$