Exercice 1 Montrer que tout polynôme de degré impair admet une racine réelle sur $\mathbb{R}$.

Correction Soit P un polynôme de degré impair.
On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.
En particulier : $\exists\ A < 0$ tel que $\forall x \leq A,\ P(x) \leq -2$. Donc, $P(A) < 0$.
De même, $\exists\ B > 0$ tel que $\forall x \geq B,\ P(x) \geq 2$. Donc, $P(B) > 0$.
Le polynôme P est continue sur $[A, B]$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [A, B]$ tel que $P(c) = 0$.
Donc, $\boxed{P \text{ admet une racine réelle}}$.

Exercice 2 Soit la fonction f définie sur $]0, 1[$ par $\forall x \in]0, 1[\ ,\ f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

1. Montrer que f est bijective de $]0, 1[$ dans un intervalle J à préciser.
   On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Correction

1. On va montrer que la fonction f est une fonction continue et strictement monotone sur $]0; 1[$.
   (a) **Continuité :** La fonction f est la somme de deux fonctions continue sur $]0; 1[$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas.
   (b) **Stricte monotonie :** La fonction f est dérivable sur $]0; 1[$ et $\forall x \in]0; 1[,\ f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 1}{(x(x-1))^2}$.

   Ce trinôme n'a pas de racines réelles donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0; 1[$.

   La fonction f est donc $\boxed{\text{une bijection de }]0;1[\text{ dans } f(]0;1[) =]\lim\limits_{x\to1^-} f(x); \lim\limits_{x\to0^+} f(x)] =]-\infty; +\infty[}$.
2. On n'a pas besoin de l'expression de f^{-1} pour déterminer la limite, seulement de la continuité de f^{-1}. Or, la fonction f est continue sur $]0; 1[$ donc la bijection réciproque f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$.
   En particulier, $\lim\limits_{y\to0} f^{-1}(y) = f^{-1}(0)$.
   Par composition de limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = f^{-1}(0)$.
   On résout l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in]0; 1[$.
   $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$
   D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2}}$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction

1. On va le démontrer par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$:"$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$."

I : Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = f\left(\frac{x}{1}\right) = f\left(\frac{x}{2^0}\right)$. La propriété est vraie au rang 0.

H : Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $P(n)$ soit vraie.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{2}}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ par hypothèse de récurrence appliquée à $\frac{x}{2}$.
Or, $f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f(x)$ par hypothèse sur f donc on a bien $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f(x)$.

C : Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est une suite constante égale à $f(x)$ par la question précédente.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et la fonction f est continue en 0. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$.
Par unicité de la limite, $f(x) = f(0)$. Ceci est vrai pour tous les réels donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 4 [$*$] Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Correction Notons T une période de f. On a donc $f(\mathbb{R}) = f([0;T])$.
La fonction f est continue sur le segment $[0,T]$ donc elle y est bornée.
$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,T],\ |f(x)| \leq M$.
Donc, $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$. Donc, $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + x\ln x + 2$.

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Dresser le tableau de variation de f (on pourra calculer les dérivées f' et f''). Préciser les limites en 0 et $+\infty$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
4. Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque f^{-1}. Indiquer les limites.
5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier qu'il existe un unique réel strictement positif x_k tel que $f(x_k) = -k$. Exprimer x_k à l'aide de la fonction f^{-1}.
6. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et déterminer sa limite.
7. Déterminer un équivalent de x_k en $+\infty$.

Correction

1. La fonction f est une somme de produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$.

   Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 2$.
   Donc, fbox$f$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$.
2. La fonction f est une somme de produit de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -2x + \ln(x) + x.\frac{1}{x} = -2x + \ln(x) + 1 \text{ et } f''(x) = -2 + \frac{1}{x}$$

   On étudie le signe de f''. $\forall x > 0,\ f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.
   Donc, f' est croissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$+$		$-$	
$f'(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	

De plus, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ donc f' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$		$-$	
$f(x)$	$\Vert$ 2		$\searrow$		$-\infty$

De plus, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans $f(\mathbb{R}_+^*) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)[=]-\infty, 2[$.
4. La bijection réciproque f^{-1} est définie sur $]-\infty, 2[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et elle a la même monotonie que f.

x	$-\infty$			2
$(f^{-1})'(x)$	$\Vert$	$-$	$-$	$\Vert$
$f^{-1}(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$		0^+ $\Vert$

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. $-k \in f(\mathbb{R}_+^*)$ et f est bijective donc $-k$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+^*$ par f
Donc, $\boxed{\text{il existe un unique réel strictement positif } x_k \text{ tel que } f(x_k) = -k}$. On a $\boxed{x_k = f^{-1}(-k)}$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}$.
$-(k+1) < -k$ donc $f^{-1}(-(k+1)) > f^{-1}(-k)$ car f^{-1} est décroissante sur $]-\infty, 2[$.
Donc, $x_{k+1} > x_k$.
Donc, $\boxed{\text{la suite } (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.
$\lim\limits_{k\to+\infty} -k = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \lim\limits_{k\to+\infty} f^{-1}(-k) = +\infty}$
7. On sait que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2$. Or, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = +\infty$ donc, par substitution, $f(x_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} -x_k^2$.
Finalement, $-k \underset{k\to+\infty}{\sim} -x_k^2$. Donc, $\boxed{x_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \sqrt{k}}$.

Exercice 6

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) Est-elle prolongeable par continuité en 0 à gauche ?
   (b) Est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

(c) Est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2. $*$ Résoudre $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

   Indication : Sur le bon ensemble, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

Correction

1. On calcule les limites à gauche et à droite de 0.
   $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \frac{\pi}{2}$.
   $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc, $\lim_{x\to 0^-} h(x) = -\frac{\pi}{2}$.
   Les limites à gauche et à droite ne sont pas les mêmes donc $\boxed{h \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0}$.
2. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction arctangente est définie sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(E) : \arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \tan(\arctan(x) + \arctan(2x)) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

$$(E) \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \dfrac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(2x))}{1-\tan(\arctan(x))\tan(\arctan(2x))} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ \dfrac{x+2x}{1-2x^2} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ 3x = 1-2x^2 \\ 1-2x^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ 2x^2+3x-1 = 0 (\text{trinôme}) \\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } x \neq \frac{-1}{\sqrt{2}}) \end{cases}$$

On résout le trinôme. On trouve deux racines rélles $\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$. Ces deux racines étant différentes de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$(E) \iff \begin{cases} \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \text{ ou } x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Or :

• $\frac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0$ et la fonction arctangente est négative sur $\mathbb{R}_-$, donc si $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$, alors $\arctan(x)+\arctan(2x) \leq 0$, n'appartient donc pas à l'ensemble $]0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $\frac{-3-\sqrt{17}}{4}$ n'est pas solution de (E).

• $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ donc $4 < \sqrt{17} < 5$, donc $\frac{1}{4} < \frac{-3+\sqrt{17}}{4} < \frac{1}{2}$. En particulier, on a : $0 < \frac{-3+\sqrt{17}}{4} < 1$ et $0 < 2\frac{-3+\sqrt{17}}{4} < 1$. Donc, puisque la fonction arctangente est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et puisque $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$,
si $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$, on a $0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{4}$ et $0 < \arctan(2x) < \frac{\pi}{4}$, donc $\arctan(x)+\arctan(2x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi,

$$(E) \iff x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc le singleton : $\boxed{S = \left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}}$.