Chapitre 25 : Dérivabilité d'une fonction réelle

Table des matières

1 Fonctions dérivables sur un ensemble

1.1 Définitions

Définition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a. On le note $f'(a)$.

Exemple 2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable en 1 et donner son nombre dérivée $f'(1)$.

Exemple 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Cette fonction est-elle continue en 0 ? Dérivable en 0 ?

Définition 4.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est dérivable sur $J \subset I$ lorsque f est dérivable en tout point de J.

On appelle fonction dérivée de f et on note f' la fonction définie par

$$f' : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ a \mapsto f'(a) \end{cases}$$

On note $\mathcal{D}(J, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 5.

Les fonctions usuelles, exceptée la fonction racine carrée, sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Exemple 6. Montrer que si f est une fonction constante sur I alors sa fonction dérivée est la fonction identiquement nulle.

Théorème 7.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, contenant 0. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

1. La fonction f est dérivable en 0.
2. La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0.

Dans ce cas,

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$$

Théorème 8.

Une fonction dérivable sur I est continue sur I.

1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 9.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, dérivables sur I.

1. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
2. La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

Théorème 10.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I.
Si f ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = \dfrac{-f'}{f^2}$.

Théorème 11.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I.
Si g ne s'annule pas, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Théorème 12.

Soient f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur J telles que $f(I) \subset J$.
La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

1.3 Etude de la dérivabilité en un point

Exemple 13. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exemple 14. Etudier la dérivabilité en 0 de $x \mapsto x\sqrt{x}$.

Définition 15.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ autre que l'extrémité gauche.
On dit que la fonction f est dérivable à gauche en a lorsque

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Le nombre ℓ est noté $f'_g(a)$.

Définition 16.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ autre que l'extrémité droite.
On dit que la fonction f est dérivable à droite en a lorsque

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Le nombre ℓ est noté $f'_d(a)$.

Exemple 17. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0.

Théorème 18.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ sans en être une extrémité ($a \in \mathring{I}$).
On a une équivalence entre :

1. f est dérivable en a.
2. f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 19. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x \leq 0 \end{cases}$
Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.4 Dérivabilité d'une bijection réciproque

Théorème 20.

Soit f une bijection de I sur J et soit f^{-1} sa bijection réciproque de J sur I.
Si la fonction f est dérivable en $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)}.$$

Exemple 21. Etudier la dérivabilité de la fonction arctan sur son ensemble de définition puis déterminer sa dérivée.

2 Propriétés des fonctions dérivables

2.1 Extrema

Définition 22.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un maximum en x_0 lorsque : $\forall x \in I,\ f(x) \leq f(x_0)$.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un minimum en x_0 lorsque : $\forall x \in I,\ f(x_0) \leq f(x)$.

Un extremum de f est un minimum ou un maximum de f.

Théorème 23.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I. Soit $a \in I$, sans en être une extrémité ($a \in \overset{\circ}{I}$).
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque 24. Ce résultat vous permet de connaître les extrema locaux **possibles** en résolvant l'équation $f' = 0$. Il faut ensuite les étudier cas par cas.

Remarque 25. La réciproque est fausse.
La fonction $x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée s'annule en 0 sans admettre d'extremum en 0.

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 26.

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$,
3. $f(a) = f(b)$.

Alors, $\exists\, c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 27. Le réel c n'est pas unique.

Exemple 28. Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Montrer qu'entre deux racines de P, il existe une racine de P'.

2.3 Égalité des accroissements finis

Théorème 29.

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors, $\exists\, c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ou encore $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Exemple 30. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0; 1[$ tel que

$$4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 = a + b + c$$

2.4 Caractérisation de la monotonie d'une fonction

Théorème 31.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
f est constante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Exemple 32. Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer sa dérivée.
2. Que peut-on en déduire ?

Théorème 33.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I.

1. f est croissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.

Théorème 34.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable sur I.

1. Si f' est strictement positive sur I sauf, peut-être, en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.
2. Si f' est strictement négative sur I sauf, peut-être, en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple 35. Etudier la monotonie de la fonction cosinus sur $[0, 2\pi]$.

2.5 Inégalité des accroissements finis (A refaire à chaque fois)

Exemple 36. On va montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$.
   Appliquer l'égalité des accroissements finis à la fonction sin sur le segment $[x, y]$.
2. En déduire l'inégalité souhaitée.

Exemple 37. Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sin(u_n)$.

1. En appliquant l'égalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}| \leq \dfrac{|u_n|}{2}$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2^n}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3 Fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

3.1 Définitions

Définition 38.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On définit par récurrence les fonctions dérivées successives de f par

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \text{si } f^{(m-1)} \text{ est dérivable sur } I \text{ , } f^{(m)} = (f^{(m-1)})' \end{cases}$$

Exemple 39. On peut montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Définition 40.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I lorsque f est k fois dérivable et que $f^{(k)}$ est continue sur I.

On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 41. La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Théorème 42.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un même ensemble I.

1. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.
2. La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Exemple 43. Calculer la dérivée d'ordre 3 de la fonction $f(x) = x^3 \mathbf{e}^x$.

Théorème 44.

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et g une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur J telles que $f(I) \subset J$.
La composée $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Exemple 45. La fonction $x \mapsto \mathbf{e}^{\sin(x)}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.