Chapitre 26 Espaces vectoriels

Table des matières

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé dans tout le chapitre.

1 Structure de $\mathbb{R}^n$

1.1 Définition

Définition 1.

On note $\underline{\mathbb{R}^n}$ l'ensemble des n-uplets formés de réels

$$\mathbb{R}^n = \{\overrightarrow{u} = (x_1, \dots, x_n) \ / \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont appelés <u>vecteurs de $\mathbb{R}^n$</u>.
On appelle <u>vecteur nul de $\mathbb{R}^n$</u> le vecteur défini par $\overrightarrow{0_n} = (0, \dots, 0)$.

Définition 2 (Opérations sur $\mathbb{R}^n$)**.**

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ comme l'unique vecteur de composantes $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.
2. On définit le vecteur $\lambda.\overrightarrow{u}$ comme l'unique vecteur de composantes $(\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n)$.

1.2 Lois de compositions interne et externe sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 3 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ sur $\mathbb{R}^n$ a les propriétés suivantes.

- **Commutativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
- **Associativité** : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
- **Elément neutre** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0_n} = \overrightarrow{u}$.
- **Symétrique** : $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$, $\exists \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Théorème 4 (Règles de calculs)**.**

La loi $+$ et la loi . sur $\mathbb{R}^n$ ont les propriétés suivantes.

- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$, $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left(\lambda = 0 \text{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right)$.
- $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$, $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$ et $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$.
- $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$.

1.3 Stabilité par combinaison linéaire

Définition 5 (Combinaison linéaire de 2 vecteurs.)**.**

Soient $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle <u>combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$</u> tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de la forme

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1.\overrightarrow{e_1} + \lambda_2.\overrightarrow{e_2} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}.$$

Exemple 6. $(1,1,1) = (1,0,2)+(0,1,-1)$ donc $(1,1,1)$ est une combinaison linéaire de $(1,0,2)$ et de $(0,1,-1)$.

Exemple 7. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
$(\lambda,\mu,-\lambda+\mu) = (\lambda,0,-\lambda)+(0,\mu,\mu) = \lambda.(1,0,-1)+\mu.(0,1,1)$. Donc, $(\lambda,\mu,-\lambda+\mu)$ est une combinaison linéaire de $(1,0,-1)$ et de $(0,1,1)$.

Définition 8.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $F = (\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle combinaison linéaire de la famille F tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de la forme

$$\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overrightarrow{e_k} = \lambda_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{e_p} \text{ avec } \forall k \in [\![1,p]\!],\ \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Théorème 9 (Stabilité par combinaison linéaire)**.**

Toutes les combinaisons linéaires formées à partir de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On dit alors que $\mathbb{R}^n$ est stable par combinaison linéaire.

Remarque 10. On a déjà rencontré des ensembles possédant cette stabilité par combinaison linéaire.

1.
2.
3.
4.

2 Structure de sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

2.1 Sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Définition 11.

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ signifie que

1. F est non vide
2. $\forall(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \in F^2,\ \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \in F$.

Exemple 12. Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x+2y+3z = 0\right\}$. Montrer que F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 13. Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x+2y+3z = 0 \text{ et } x-y+z = 0\right\}$. Montrer que F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 14. Soit $F = \left\{(a,b,a+b,0),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2.2 Sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs

Définition 15.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On appelle espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$, et on note $\text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$, l'ensemble

$$\text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i . \overrightarrow{e_i},\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est l'ensemble contenant toutes les combinaisons linéaires formée à partir des vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$
.

Exemple 16. Déterminer Vect $((1, 0, -1), (0, 1, 1))$.

Exemple 17. Soit $F = \left\{ (x, z, -x + y + z, y), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$. Montrer que $F =$Vect $((1, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0))$.

Théorème 18.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
$\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 19. Montrer que $F = \left\{ (x, y, -x)\ ,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.3 Stabilité par combinaisons linéaires d'un sous−espace vectoriel.

Théorème 20.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
Toutes les combinaisons linéaires formées à partir de vecteurs de F sont des vecteurs de F.
On dit que F est stable par combinaison linéaire.

2.4 Intersection de sous-espaces vectoriels

Théorème 21 (Intersection de deux sous−espaces vectoriels)**.**

Soient F et G deux sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Alors, $F \cap G$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 22. L'intersection de deux plans de $\mathbb{R}^3$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 23 (Intersection d'un nombre fini de sous−espaces vectoriels)**.**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $F_1, \dots F_p$ des sous−espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
Alors, $\bigcap_{k=1}^{p} F_k$ est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 24. En général, l'union de deux sous−espaces vectoriels n'est pas un sous−espace vectoriel.
Soient $F = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter (rapidement) $F \cup G$.
3. Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On pourra s'aider d'un dessin.

3 Familles de vecteurs dans un sous−espace vectoriel

Exemple 25. Montrer que $\text{Vect}((1,1,1),(-2,-2,-2)) = \text{Vect}((1,1,1))$.

Exemple 26. Exprimer plus simplement $\text{Vect}((1,1,1),(1,2,3),(0,-1,-2))$.

3.1 Familles liées, familles libres

Définition 27.

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est liée lorsque un des vecteurs de la famille peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.
- On dit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est libre lorsqu'elle n'est pas liée.

Exemple 28. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\overrightarrow{u} = (2,3,5)$, $\overrightarrow{v} = (3,4,0)$ et $\overrightarrow{w} = (5,7,5)$.
Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est liée.

Théorème 29 (Caractérisation d'une famille liée)**.**

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On a équivalence entre

1. La famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est liée.
2. $\exists\, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{0_n}$.

Remarque 30. Pour montrer qu'une famille est liée, on doit déterminer les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.
On raisonnera souvent par analyse et synthèse.

Théorème 31 (Caractérisation d'une famille libre)**.**

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On a équivalence entre

1. La famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est libre.
2. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{e_k} = \overrightarrow{0_n} \Rightarrow \forall k \in [\![1, p]\!],\ \lambda_k = 0\right)$.

Exemple 32. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\overrightarrow{u} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{v} = (3,1,2)$ et $\overrightarrow{w} = (2,3,1)$.
Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 33. Soient $\overrightarrow{u} = (0,2,3)$ et $\overrightarrow{v} = (1,0,3)$. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 34. Pour montrer qu'une famille est libre, on devra souvent résoudre un système.

3.2 Familles génératrices d'un sous−espace vectoriel

Définition 35.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une famille finie de F.
On dit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ est génératrice de F lorsque $F = \text{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$.

$$\forall \overrightarrow{x} \in F,\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } \overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{e_k}$$

Tout vecteur de F est une combinaison linéaire de la famille $(e_1, \ldots, e_p)$.

Exemple 36. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0) + y(0, 1),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0), (0, 1))$.
Donc, la famille $((1, 0), (0, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 37. La famille $(\overrightarrow{e_1} = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}), \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \overrightarrow{e_n} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 38. Soit $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + z = 0\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une famille génératrice.

Exemple 39. Montrer que la famille $\mathcal{D} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 40. Soit le système $\left\{ \begin{array}{r} x + 2y - 4z = 0 \\ x - y + t = 0 \end{array} \right.$.
Notons F l'ensemble des solutions de ce système. Déterminer une famille génératrice de F.

3.3 Bases d'un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Définition 41.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une famille finie de F.
On dit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ est une base de F lorsque elle est libre et génératrice de F.

Exemple 42. La famille $((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On l'appelle *la base canonique* de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 43. Soit $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\right\}$.
Montrer que F est un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

Théorème 44 (Existence de bases, ADMIS)**.**

Tous les sous−espaces vectoriels non vides de $\mathbb{R}^n$ admettent des bases.

3.4 Coordonnées dans une base

Théorème 45.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de F.
Alors, tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$.

$$\forall \overrightarrow{x} \in F,\ \exists\,!\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{e_k}$$

Remarque 46. génératrice → existence et libre → unicité.

Définition 47.

Soit F un sous−espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de F.
On appelle coordonnées de $\overrightarrow{x} \in F$ dans la base $\mathcal{B}$ les **uniques** coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tels que $\overrightarrow{x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{e_k}$.
On appelle matrice de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne contenant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Remarque 48. Cela étend la définition de coordonnées rencontrée pour les vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 49. Soit $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Au lieu d'écrire "soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$", on devrait écrire "soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans la base canonique sont (x,y,z)".

Exemple 50. Soit $\mathcal{B} = ((1,0,1),(1,1,0),(0,0,1))$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées dans cette base d'un vecteur (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$.

4 Autres exemples de sous−espaces vectoriels.

Exemple 51. Les ensembles suivants ont la propriété de stabilité par combinaisons linéaires.

1. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel.
   L'addition et la multiplication externe sont celles définies dans le chapitre "Complexes".
2. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.
   L'addition et la multiplication externe sont celles définies dans le chapitre "Matrices".
   L'élément neutre est la matrice nulle.
3. L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
   L'élément neutre est la fonction constante égale à 0.
4. L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
5. $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Exemple 52. On peut montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / M \text{ soit diagonale}\}$.
2. $F = \{y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ ay'' + by' + cy = 0\}$.
3. $F = \mathbb{K}_n[\mathbf{X}]$.
4. $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}$.