Exercice 1 Pour chaque fonction, déterminer son ensemble de dérivabilité et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \mathbf{e}^{\mathbf{e}^x}$
2. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$
4. $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$
5. $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x) - \cos(x)}{\operatorname{sh}(x) + \sin(x)}$

Exercice 2 Etudier la dérivabilité en 0, puis sur $\mathbb{R}$, des fonctions suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x|x|$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4 Soient sh et ch les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sh}(x) = \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{2} \text{ et } \operatorname{ch}(x) = \frac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{2}$$

1. Montrer que sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à déterminer.
   On note argsh sa bijection réciproque.
3. Justifier que argsh est dérivable sur J et déterminer sa dérivée en fonction de ch.
4. En remarquant que $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. * Déterminer une expression de argsh.

Exercice 5 Soit $\alpha \in]0,1[$.

1. Soit $t \in]0,1[$. Montrer qu'il existe $c \in]t,1[$ tel que $\dfrac{t^\alpha - 1}{t-1} = \alpha.c^{\alpha-1}$.
2. En déduire que $\forall t \in]0,1],\ t^\alpha \leq \alpha(t-1)+1$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan(x)$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à déterminer.
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
   Déterminer cette unique solution.
4. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{\arctan(u_n)}{2} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.
   (b) En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

<u>Exercice 7</u> Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x - x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. f est-elle continue en 0 ?
2. f est-elle dérivable en 0 ? Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$?
   Préciser f' sur son ensemble de définition.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$? De classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$?