Corrigé du DS n°7 - 10 avril 2025.

[illegible]ours.

1) $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ donc $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.

2) On applique la formule de Koenig-Huygens

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Par la formule de transfert, $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k)$

donc $E(X^2) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\text{Donc } V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

donc $\boxed{V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}}$.

Exercice :

1R 2N 3J

1) $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$

$P(X=1) = P(R_1) = \dfrac{1}{6}$

$P(X=2) = P\big((N_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap R_2) \cup (J_1 \cap R_2)\big)$

$= P(N_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap R_2) + P(J_1 \cap R_2)$ par incomp.

$= P(N_1)P(N_2 | N_1) + P(N_1)P(R_2 | N_1) + P(J_1)P(R_2 | J_1)$

Corrigé du devoir surveillé n° 9

— 11 juin 2022—

Exercice 1.

1. (a) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on peut noter X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i-$ème élève répond et 0 sinon.
On a donc $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec les $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ sont indépendantes. Donc $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$.
Pour le reste du problème, on a donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(Y = i) > 0$.

   (b) $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

   (c) La variable Z peut valoir 0 si aucun élève ne répond au deuxième appel. Elle peut également valoir nn si aucun élève n'a répondu au premier appel et qu'ils répondent tous au deuxième.
Finalement, $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

   (d) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, sachant $Y = i$ veut dire que $n - i$ élèves n'ont pas répondu et que le professeur les relance de façon indépendantes.
Finalement, $Z_{Y=i}$ suit une loi binomiale de paramètre $n - i$ et p.

   (e) Soit $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2$.
$\mathbb{P}_{(Y=i)}(Z = k) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in [\![0, n-i]\!], \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

2. (a) Soit $(i, k, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq i \leq k \leq n$, on a :
$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \frac{n!(n-i)!}{i!(n-i)!(k-i)!(n-k)!} = \frac{n!k!}{k!(n-k)!i!(k-i)!} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$

   (b) On a :
$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((Y = 0) \cap (Z = 0)) = \mathbb{P}(Y = 0)\mathbb{P}_{(Y=0)}(Z = 0) = (1-p)^n(1-p)^n = (1-p)^{2n}$$
et
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}\left(((Y = 1) \cap (Z = 0)) \cup ((Y = 0) \cap (Z = 1))\right) \\ &= \mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}_{(Y=1)}(Z = 0) + \mathbb{P}(Y = 0)\mathbb{P}_{(Y=0)}(Z = 1) \\ &= \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}(1-p)^{n-1} + (1-p)^n \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} \\ &= (2-p)\, np(1-p)^{2(n-1)}. \end{aligned}$$

   (c) On a $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{k} (Y = i) \cap (Z = k-i)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}_{(Y=i)}(Z = k-i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-i-(k-i)} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (1-p)^{k-i} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2(n-k)} (2-p)^k \\ &= \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}. \end{aligned}$$
Donc $X \sim \mathcal{B}(n, p(2-p))$.

   (d) On a donc que $E(X) = np(2-p)$.

   (e) Par ailleurs, $V(X) = np(2-p)(1-p)^2$.

Exercice 1

1) a) $P(B_1) = \frac{1}{2}$.

$(B_1, \overline{B_1})$ forme un SCE. D'après la formule des proba totales,

$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \overline{B_1})$$
$$= P(B_1)P(B_2|B_1) + P(\overline{B_1})P(B_2|\overline{B_1})$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{2}$$

b) $X_1(\Omega) = [\![1,2]\!]$.

$P(X_1 = 1) = P(\overline{B_1}) = \frac{1}{2}$

$P(X_1 = 2) = P(B_1) = \frac{1}{2}$.

donc $X_1 \sim \mathcal{U}([\![1,2]\!])$

c) $X_2(\Omega) = [\![1,3]\!]$

$$P(X_2 = 1) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}|\overline{B_1})$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(X_2 = 2) = P\left(B_1 \cap \overline{B_2} \cup (\overline{B_1} \cap B_2)\right)$$
$$= P(B_1 \cap \overline{B_2}) + P(\overline{B_1} \cap B_2) \text{ par incompa.}$$
$$= P(B_1)P(\overline{B_2}|B_1) + P(\overline{B_1})P(B_2|\overline{B_1})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$P(X_2 = 3) = 1 - 1/3 - 1/3 = \frac{1}{3}$

donc $X_2 \sim \mathcal{U}(⟦1, 3⟧)$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in ⟦1, n+2⟧$.

$((X_n = \ell), \ell \in ⟦1, n+1⟧)$ est un SCE. Par la formule des proba totales,

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{\ell=1}^{n+1} P(X_{n+1} = k \cap X_n = \ell)$$

Or, si $\ell \notin \{k, k-1\}$, $P(X_{n+1} = k \cap X_n = \ell) = 0$ car le nombre de boules blanches ne peut augmenter que de 0 ou 1.

Donc,

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_{n+1} = k \cap X_n = k) + P(X_{n+1} = k \cap X_n = k-1)$$

$$= P(X_{n+1} = k \mid X_n = k) P(X_n = k) + P(X_{n+1} = k \mid X_n = k-1) P(X_n = k-1)$$

$$= \frac{2+n-k}{2+n} P(X_n = k) + \frac{k-1}{2+n} P(X_n = k-1)$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H(n)$: " $X_n \sim \mathcal{U}(⟦1, n+1⟧)$ ".

(I) $X_1 \sim \mathcal{U}(⟦1,2⟧)$ donc $H(1)$ est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ soit vrai.

Soit $k \in ⟦1, n+2⟧$.

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{2+n-k}{2+n} \times \frac{1}{n+1} + \frac{k-1}{2+n} \times \frac{1}{n+1} \text{ par HdR}.$$

$$= \frac{2+n-k+k-1}{(2+n)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+2}.$$

donc $H(n+1)$ est vraie.

(c) Par le principe de récurrence, ...

3) (a) Soit $k \in ⟦1, n+1⟧$.

Sachant $X_n = k$, on a pioché k boules blanches et $n-k$ boules noires. Donc, on a ajouté k boules blanches et $n-k$ boules noires. Donc l'urne contient $1+k$ boules blanches et $1+n-k$ boules noires.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\left((X_n = k), k \in [\![1, n+1]\!] \right)$ forme un SCE.

Par la formule des probabilités totales,

$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} P(B_{n+1} \mid X_n = k) P(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+2} \times \frac{1}{n+1}.$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{1}{2}$$